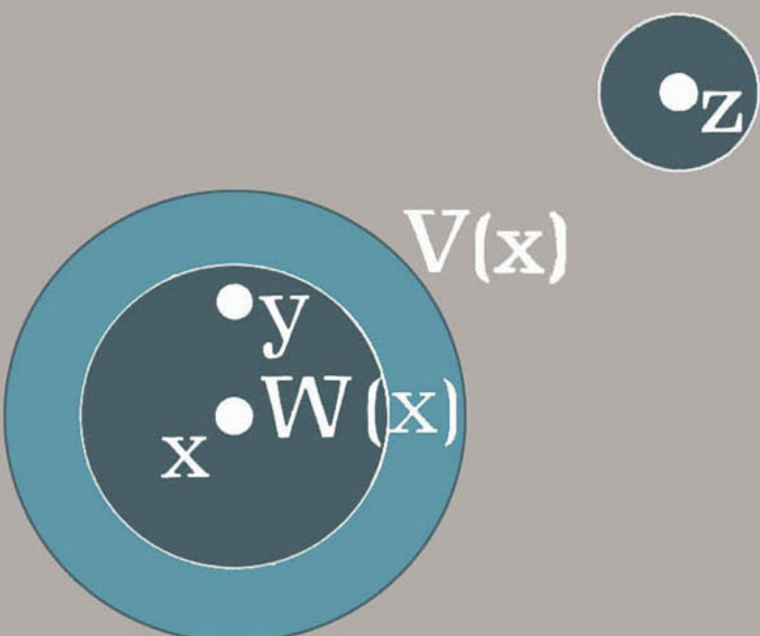
serie de matemática monografía no. 9

INTRODUCCION A LA TOPOLOGIA GENERAL

Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico
Departamento de Asuntos Científicos
Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos



INTRODUCCION A
LA TOPOLOGIA GENERAL

por

Juan Horváth

Universidad de Maryland

College Park, Md., ESTADOS UNIDOS

Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico

Departamento de Asuntos Científicos

Secretaría General
de la Organización de los Estados Americanos

Washington, D.C. - 1969

Esta monografía ha sido preparada para su publicación
en el Departamento de Asuntos Científicos de la Unión Panamericana
Editora: Eva V. Chesneau

Asesor Técnico: Dr. Emilio Lluis Riera
Instituto de Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México
México D.F., MEXICO

Dedicado a la memoria
de dos educadores colombianos
prematuramente desaparecidos:

Leopoldo Guerra Portocarrero

y

Reinaldo Muñoz Zambrano

A LOS LECTORES

El programa de monografías científicas es una faceta de la vasta labor de la Organización de los Estados Americanos, a cargo del Departamento de Asuntos Científicos de la Secretaría General de dicha Organización, a cuyo financiamiento contribuye en forma importante el Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico.

Concebido por los Jefes de Estado Americanos en su Reunión celebrada en Punta del Este, Uruguay, en 1967, y cristalizado en las deliberaciones y mandatos de la Quinta Reunión del Consejo Interamericano Cultural, llevada a cabo en Maracay, Venezuela, en 1968, el Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico es la expresión de las aspiraciones preconizadas por los Jefes de Estado Americanos en el sentido de poner la ciencia y la tecnología al servicio de los pueblos latinoamericanos.

Demostrando gran visión, tal altas autoridades reconocieron que la ciencia y la tecnología está transformando la estructura económica y social de muchas naciones y que, en esta hora, por ser instrumento indispensable de progreso en América Latina, necesita un impulso sin precedentes.

El Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico es un complemento de los esfuerzos nacionales de los países latinoamericanos y se orienta hacia la adopción de medidas que permitan el fomento de la investigación, la enseñanza y la difusión de la ciencia y la tecnología; la formación y perfeccionamiento de personal científico; el intercambio de informaciones, y la transferencia y adaptación a los países latinoamericanos del conocimiento y las tecnologías generadas en otras regiones.

En el cumplimiento de estas premisas fundamentales, el programa de monografías representa una contribución directa a la enseñanza de las ciencias en niveles educativos que abarcan importantísimos sectores de la población y, al mismo tiempo, propugna la difusión del saber científico.

La colección de monografías científicas consta de cuatro series, en español y portugués, sobre temas de física, química, biología y matemática. Desde sus comienzos, estas obras se destinaron a profesores y alumnos de ciencias de enseñanza secundaria y de los primeros años de la universitaria; de éstos se tiene ya testimonio de su buena acogida.

Este prefacio brinda al Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico y a la Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos la ocasión de agradecer al doctor Juan Horváth, autor de esta monografía, y a quienes tengan el interés y buena voluntad de contribuir a su divulgación.

septiembre de 1969

INDICE

0

OBSERVACIONES SOBRE TERMINOLOGIA Y NOTACIONES

Como es costumbre hoy día en escritos sobre matemática, se hará uso en esta monografía de los conceptos y notaciones más sencillos y básicos de la Teoría de los Conjuntos. Aunque se supone que el lector esté familiarizado con ésta, nuestro propósito es recordarle en este breve capítulo introductorio los conceptos a los que nos referiremos en lo que sigue, así como fijar algunas notaciones.

Un conjunto X es una colección de objetos llamados elementos de X. Por la notación $x \in X$ se indica que x es elemento de X (o que x pertenece a X), y por la $x \notin X$ se indica que x no es elemento de X. Un conjunto está bien definido si se puede decidir sin ambigüedad cuáles son sus elementos. Para representar un conjunto, se coloca primero entre llaves $\{\ \}$ un símbolo que denote el elemento general del conjunto, y luego, separado por una raya vertical, la propiedad que caracteriza a los elementos de dicho conjunto. Si el conjunto es finito, todos sus elementos se pueden escribir entre las $\{\ \}$. Así, el conjunto cuyos elementos son los números 2, 4, 6, 8 se puede escribir $\{2, 4, 6, 8\}$ o $\{n \mid n$ número par, $2 \leqq n \leqq 8\}$ o $\{n \mid n = 2k,\ k$ número entero, $1 \leqq k \leqq 4\}$.

Para algunos conjuntos de especial importancia se utilizarán los siguientes símbolos:

N denota el conjunto de los números enteros positivos, llamados también números naturales: 0, 1, 2, 3, 4, ... (obsérvese que el 0 se considera número positivo);

Z designa el conjunto de los números enteros: 0, ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ...;

Q representa el conjunto de los números racionales;

R simboliza el conjunto de los números reales.

Si A y B son dos conjuntos, entonces se dice que A es un *subconjunto* de B, o que A está contenido en B, o que B contiene a A, y se escribe $A \subset B$ o $B \supset A$, si todo elemento de A es también elemento de B. Para describir un subconjunto A de B se utilizará a menudo la notación $\{x \in B \mid x \in A\}$; por ejemplo, $\mathbf{Q}_+ = \{r \in \mathbf{Q} \mid r \geqq 0\}$ es el conjunto de los números racionales positivos, y $\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geqq 0\}$ el conjunto de los números reales positivos. Cada conjunto contiene un subconjunto especial, llamado el *conjunto vacío*, al cual no pertenece elemento alguno, y que se denota por $\emptyset$. Si $x \in X$, hay que distinguir entre el elemento x y el subconjunto $\{x\}$ de X que consta del único elemento x.

Sean A y B dos subconjuntos del conjunto X. Se llama *unión* o *reunión* de los conjuntos A y B, y se denota por $A \cup B$, el subconjunto de X formado por todos los elementos de X que pertenecen por lo menos a uno de los dos conjuntos A y B. Se llama *intersección*, y se denota por $A \cap B$, el subconjunto de todos los elementos de X que pertenecen a ambos conjuntos A y B. Si $A \cap B = \emptyset$, es decir si A y B no tienen elemento alguno en común, se dice que los conjuntos A y B son *disjuntos* (o ajenos). Si A, B y C son tres subconjuntos de X se tiene

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ y } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

El conjunto A está contenido en B si, y sólo si, $A \cup B = B$ o $A \cap B = A$.

Si A es un subconjunto del conjunto X, se llama el *complemento* de A con respecto a X, y se representa por $\complement_X A$ al conjunto de todos los elementos de X que no pertenecen a A, es decir: $\complement_X A = \{x \in X \mid x \notin A\}$. Si no hay duda posible acerca del conjunto X respecto al cual se toma el complemento, escribiremos simplemente $\complement A$ en vez de $\complement_X A$. Se tiene $\complement(\complement A) = A$, y si A y B son dos subconjuntos de X se tienen las dos leyes de De Morgan:

$$\complement(A \cup B) = (\complement A) \cap (\complement B), \quad \complement(A \cap B) = (\complement A) \cup (\complement B).$$

Sean X e Y dos conjuntos. Una *función* o *aplicación* f definida en X que toma sus valores en Y (o con valores en Y), asocia a cada elemento $x \in X$ un elemento $f(x) \in Y$. Se dice también que f es una aplicación de X en Y, o que f aplica X en Y. El conjunto X se llama dominio de definición de f, y para indicar que f está definida en X y que toma sus valores en Y se escribe $f : X \to Y$. El elemento $f(x)$ se llama el valor de f en x, y para indicar que $f(x)$ es el valor de f en x se utiliza también la notación $f : x \mapsto f(x)$.

Para $A \subset X$, el conjunto de todos los elementos $y \in Y$ para los cuales existe un elemento $x \in A$ tal que $y = f(x)$ se denota por $f(A)$ y se llama la *imagen* de A con respecto a f. En particular, el conjunto $f(X)$ se llama la imagen de f. Si $f(X) = Y$, se dice que f es una *suprayección* o que es una *aplicación suprayectiva*, o que aplica X sobre Y.

Para $B \subset Y$, el conjunto $f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$ se llama *imagen inversa* de B. Cualesquiera que sean los subconjuntos B y C de Y se tiene $f^{-1}(B \cup C) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(C)$, $f^{-1}(B \cap C) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(C)$ y $f^{-1}(\complement_Y B) = \complement_X f^{-1}(B)$.

Si para cada $y \in f(X)$ existe sólo un elemento $x \in X$ tal que $y = f(x)$, se dice que f es una *inyección* o una *aplicación inyectiva*. En particular, si X es un subconjunto de Y, la aplicación $x \mapsto x$ de X en Y se denomina *inyección canónica*. Una función que sea a la vez inyectiva y suprayectiva se denomina *biyección* o *aplicación biyectiva*.

Si $f: X \to Y$ es una biyección, entonces la función que a cada $y \in Y$ hace corresponder el único elemento $x \in X$ tal que $y = f(x)$, se llama la *inversa* de f y se denota por f^{-1}.

Sean X, Y y Z tres conjuntos, f una aplicación de X en Y y g una aplicación de Y en Z. La función que a cada $x \in X$ hace corresponder el elemento $g(f(x))$ de Z, se llama la *composición* de las aplicaciones f y g, y se denota por $g \circ f$.

Si f es una aplicación de X en Y y si T es un subconjunto de X, entonces la función, con dominio de definición T y con valores en Y, que a cada $t \in T$ asocia el valor $f(t)$, se llama la *restricción* de f a T y se denota por $f | T$. Para cada subconjunto B de Y se tiene $(f | T)^{-1}(B) = f^{-1}(B) \cap T$.

Sean I y X dos conjuntos. Una *familia* de elementos de X se define mediante una aplicación de I en X; la imagen de I en X es el *conjunto de elementos* de la familia, e I es el *conjunto de los índices*. Si $\iota \mapsto x_\iota$ es la aplicación de I en X que define la familia, entonces ésta se denotará por $(x_\iota)_{\iota \in I}$ o, simplemente, (x_ι). Dado un conjunto cualquiera X, se puede definir una familia cuyo conjunto de elementos es X mediante la aplicación identidad $x \mapsto x$. Por lo tanto, el concepto de familia es más general que el de conjunto, ya que no es necesario que para $\iota \neq \kappa$ se tenga $x_\iota \neq x_\kappa$. Si J es un subconjunto de I, entonces la restricción a J de la aplicación $\iota \mapsto x_\iota$ define la *subfamilia* $(x_\iota)_{\iota \in J}$ de la familia $(x_\iota)_{\iota \in I}$.

Si X es un conjunto y $(A_\iota)_{\iota \in I}$ una familia de subconjuntos de X, entonces la reunión o unión $\bigcup_{\iota \in I} A_\iota$ de los A_ι es el subconjunto de X formado por los elementos que pertenecen, por lo menos, a un conjunto A_ι. La intersección $\bigcap_{\iota \in I} A_\iota$ de los A_ι consiste de todos los elementos de X que pertenecen a cada conjunto A_ι.

Se dice que un conjunto X es *enumerable* si existe una biyección de un subconjunto de $\mathbf{N}$ sobre X. Si X es un conjunto finito no vacío, entonces existe una biyección de un subconjunto $\{k \in \mathbf{N} \mid 1 \leqq k \leqq n\}$ de $\mathbf{N}$ sobre X, el número entero n está bien definido por X y es el número de elementos de X. Si X es un conjunto enumerable infinito, entonces existe una biyección de $\mathbf{N}$ sobre X.

Una familia $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de elementos de un conjunto X, cuyo conjunto de índices es $\mathbf{N}$, se llama una *sucesión*. Los elementos x_n se llaman los *términos* de la sucesión. El conjunto de elementos de una sucesión es siempre enumerable. Inversamente, un conjunto X es enumerable si existe una sucesión cuyo conjunto de elementos es X. En particular, cada subconjunto de un conjunto enumerable es enumerable.

Si $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ es una familia enumerable de subconjuntos de X y si cada uno de los conjuntos de A_n es enumerable, entonces $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n$ es un conjunto enumerable. En efecto, los elementos de A_n se pueden organizar en una sucesión $(a_{nk})_{k \in \mathbf{N}}$. Luego, si los elementos de

$\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n$ se escriben en forma rectangular

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{00} \to & a_{01} & a_{02} & a_{03} & . & . & . & a_{0n} & . & . & . \\
a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} & . & . & . \\
a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} & . & . & . \\
a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & . & a_{3n} & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

se ve que arreglando los elementos a_{nk} en el sentido indicado por las flechas, es decir poniendo

$$b_{\frac{1}{2}m(m+1)+n} = a_{nk}$$

para $n + k = m$, $0 \leqq n \leqq m$, se obtiene una sucesión $(b_j)_{j \in \mathbf{N}}$ cuyo conjunto de elementos es $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n$.

Un raciocinio semejante demuestra que el conjunto $\mathbf{Q}$ de los números racionales es enumerable. Esta vez se arreglan los números $r = \frac{m}{n}$, $n > 0$, según el valor de $h = |m| + n$, en forma triangular

$$\begin{array}{ll}
h = 1 & \frac{0}{1} \\[2mm]
h = 2 & -\frac{1}{1}, \frac{0}{2}, \frac{1}{1} \\[2mm]
h = 3 & -\frac{2}{1}, -\frac{1}{2}, \frac{0}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1} \\[2mm]
h = 4 & -\frac{3}{1}, -\frac{2}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{0}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1} \\[2mm]
h = 5 & -\frac{4}{1}, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{0}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1} \\
 & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{array}$$

y se obtiene que $\mathbf{Q}$ es el conjunto de los elementos de la sucesión $(b_j)_{j \in \mathbf{N}}$ definida por

$$b_{(h-1)^2+j} = \frac{-h+j+1}{n},$$

donde $0 \leq j \leq 2h-2$, $n = j+1$ si $0 \leq j \leq h-1$, $n = 2h-j-1$ si $h-1 \leq j \leq 2h-2$ y h recorre los números enteros ≥ 1. 5

Para demostrar la prop. **2.**6.2 hay que recurrir al hecho de que es enumerable el conjunto $\mathbf{Q}^p$ de las p-tuplas $(r_1, \ldots, r_p)$ de números racionales. Más generalmente, si X es un conjunto enumerable, el conjunto X^p de las p-tuplas $(x_1, \ldots, x_p)$ de elementos de X es enumerable. Esto se ve ordenando primero X en una sucesión $(x^{(n)})_{n \in \mathbf{N}}$, y luego ordenando las p-tuplas $(x^{(n_1)}, \ldots, x^{(n_p)})$ según el valor de $n_1 + \ldots + n_p$:

$$(x^{(0)}, \ldots, x^{(0)}),$$

$$(x^{(1)}, x^{(0)}, \ldots, x^{(0)}),\ (x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(0)}), \ldots,\ (x^{(0)}, x^{(0)}, \ldots, x^{(1)}),$$
$$(x^{(2)}, x^{(0)}, \ldots, x^{(0)}),\ (x^{(1)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(0)}), \ldots$$

Finalmente, en el ejemplo **4.**4.3 se utilizará el hecho de que un intervalo $]a, b[= \{x \mid a < x < b\}$ de la recta real $\mathbf{R}$ no es enumerable si $a < b$. Demostremos primero que el intervalo $]0, 1[$ no es enumerable. Sea (x_n) una sucesión cualquiera de números reales entre 0 y 1 y escribamos sus desarrollos decimales:

$$\begin{array}{lcl}
x_0 & = & 0, x_{01} x_{02} x_{03} \ldots x_{0n} \ldots \\
x_1 & = & 0, x_{11} x_{12} x_{13} \ldots x_{1n} \ldots \\
\cdot & & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
x_n & = & 0, x_{n1} x_{n2} x_{n3} \ldots x_{nn} \ldots \\
\cdot & & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{array}$$

donde, para lograr la unicidad del desarrollo, se adoptó en todo caso el desarrollo infinito (por ejemplo, $\frac{1}{4} = 0,24999\ldots$, y no $\frac{1}{4} = 0,25000\ldots$). A cada $n \geq 1$ asóciese un número y_n entero tal que $1 \leq y_n \leq 8$, distinto de x_{nn}. Entonces el número cuya expresión decimal es $0, y_1 y_2 y_3 \ldots y_n \ldots$ pertenece al intervalo $]0,1[$ pero es distinto de cada x_n. Así ninguna sucesión puede tener $]0,1[$ por conjunto de elementos, es decir: $]0,1[$ no es enumerable. Ahora bien, por ser $x \mapsto (b-a)x + a$ una biyección de $]0,1[$ sobre $]a,b[$, tampoco $]a,b[$ puede ser enumerable.

Terminemos esta introducción con algunas palabras sobre la organización del texto de la monografía. Los capítulos se indican por números en negritas: **1**, **2**, **3**, **4**. Los teoremas, proposiciones, definiciones, ejemplos y observaciones se ordenan mediante una numeración doble: el primer número designa la sección respectiva (§), y el segundo, la posición que ocupan en ésta. Dentro del mismo capítulo sólo se utilizan estos dos números; así, por ejemplo, prop. 2.2 se refiere a la segunda proposición de la §2 del mismo capítulo. Para referirse a un teorema, proposición, etc., de otro capítulo se alude también al número de éste, por ejemplo, def. **3**.4.2 se refiere a la segunda definición de la §4 del capítulo tercero. El lector observará que hay un paralelismo muy estrecho entre los capítulos , y que se ha tratado, en lo posible, de asignar el mismo número a los resultados análogos de los varios capítulos. El símbolo ◊ indica el fin de una demostración.

1

LA TOPOLOGIA DE LA RECTA REAL

§ 1. El Cuerpo de los Números Reales

La topología general es el estudio de la continuidad y de la convergencia. En los tres capítulos que siguen se examinarán estos conceptos a la luz de situaciones más y más generales para llegar en el cuarto a la abstracción última, a saber, la noción de espacio topológico.

En este capítulo se empezará por definir los conceptos topológicos sobre la recta real, si bien antes, de manera resumida, indicaremos en esta sección las propiedades características de los números reales.

1) El conjunto **R** de los números reales es un *cuerpo* (o campo). Esto significa que sobre **R** están definidas dos operaciones algebraicas:

a) la *adición*, que a cada pareja (a, b) de elementos de **R** asocia el elemento $a + b$ de **R**, llamado la *suma* de a y b;

b) la *multiplicación*, que a cada pareja (a, b) de elementos de **R** asocia el elemento ab (denotado también por $a \cdot b$ o $a \times b$) de **R**, llamado el *producto* de a y b.

Estas dos operaciones obedecen a los siguientes axiomas:

(C1) Para toda pareja (a, b) de números reales se tiene $a + b = b + a$ (ley conmutativa de la adición).

(C2) Para toda terna (a, b, c) de números reales se cumple $a + (b + c) = (a + b) + c$ (ley asociativa de la adición).

(C3) Existe un número real 0, llamado cero, tal que $a + 0 = a$ para todo $a \in \mathbf{R}$.

(C4) Para cada número real a existe un número real $-a$, llamado el opuesto de a, tal que $a + (-a) = 0$.

(C5) Para toda pareja (a, b) de números reales se verifica $ab = ba$ (ley conmutativa de la multiplicación).

(C6) Para toda terna (a, b, c) de números reales, se tiene $a(bc) = (ab)c$ (ley asociativa de la multiplicación).

(C7) Existe un número real 1 distinto de 0, llamado uno, tal que $a \cdot 1 = a$ para todo $a \in \mathbf{R}$.

(C8) Para cada número real a, distinto de cero, existe un número real a^{-1} (ó $\frac{1}{a}$), llamado el inverso de a, tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.

(C9) Para cada terna (a, b, c) de números reales se tiene la propiedad $a(b + c) = ab + ac$ (ley distributiva).

En vez de $a + (-b)$ se suele también escribir $a - b$, y $a \cdot b^{-1}$ se escribe también a/b ó $\frac{a}{b}$. De los axiomas se deducen todas las reglas usuales de la aritmética. A continuación se dan algunos ejemplos, así como ejercicios, cuya demostración queda a cargo del lector.

Proposición 1.1. *El elemento cero es único.*

Demostración. Supongamos que existen dos elementos 0 y 0' tales que $a + 0 = a$ y $a + 0' = a$ para todo $a \in \mathbf{R}$. Escribiendo $a = 0'$ en la primera relación, se tiene $0' + 0 = 0'$; escribiendo $a = 0$ en la segunda resulta que $0 + 0' = 0$. Puesto que $0' + 0 = 0 + 0'$ por el axioma (C1), se sigue que $0 = 0'$. ◇

Proposición 1.2. *Para todo número real* a, *se tiene* $0 \cdot a = 0$.

Demostración. Según la ley distributiva se tiene

$$0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$$

y, por lo tanto, haciendo uso de los axiomas (C4) y (C2),

$$\begin{aligned} 0 = 0 \cdot a + (-0 \cdot a) &= (0 \cdot a + 0 \cdot a) + (-0 \cdot a) \\ &= 0 \cdot a + (0 \cdot a - 0 \cdot a) = 0 \cdot a. \ \diamond \end{aligned}$$

2) El cuerpo $\mathbf{R}$ de los números reales es *totalmente ordenado*. Esto significa, en primer lugar, que dado dos elementos a y b de $\mathbf{R}$ se cumple exactamente una de las tres condiciones:

$$a < b, \qquad a = b, \qquad b < a.$$

La relación $a < b$ se lee "a es menor que b" o "a es inferior a b" y equivale a $b > a$ (b es mayor que a, b es superior a a). La relación $a \leqq b$ significa que o bien a es menor que b o bien $a = b$, y equivale a $b \geqq a$. Se cumple el axioma siguiente (ley transitiva del orden):

(T) Si (a, b, c) es una terna de números reales tales que $a \leqq b$ y $b \leqq c$, entonces $a \leqq c$.

El orden está ligado a las operaciones algebraicas mediante los axiomas siguientes:

(CO1) Si a y b son dos números reales tales que $a \leqq b$, entonces $a + c \leqq b + c$ para todo número real c.

(CO2) Si a y b son dos números reales tales que $a \geqq 0$ y $b \geqq 0$, entonces $ab \geqq 0$.

Un número real a tal que $a \geqq 0$ se llama un número *positivo,* y un número a tal que $a \leqq 0$ se llama *negativo*. Un número real a tal que $a > 0$ se llama estrictamente positivo, y un número a tal que $a < 0$ se llama estrictamente negativo.

De los axiomas enunciados se deducen todas las reglas sobre el uso de desigualdades. He aquí algunos ejemplos (véanse también los ejercicios 5 a 14).

Proposición 1.3. *Si a, b, c y d son cuatro números reales tales que $a \leqq b$ y $c \leqq d$, entonces $a + c \leqq b + d$* (es decir, se puede sumar desigualdades miembro a miembro).

Demostración. En virtud del axioma (CO1) se tiene $a + c \leqq b + c$ y $c + b \leqq d + b$. Puesto que $b + c = c + b$, la conclusión resulta del axioma (T). ◇

Proposición 1.4. *Si $a \leqq b$ y $c \geqq 0$, entonces $ac \leqq bc$.*

Demostración. Restando a de ambos lados de $a \leqq b$ se tiene $0 \leqq b - a$, luego de (CO2) resulta $0 \leqq (b-a)c = bc - ac$. Sumando ac a ambos lados obtenemos la conclusión enunciada. ◇

3) El cuerpo ordenado $\mathbf{R}$ es *completo* en el siguiente sentido. Se dice que un conjunto A de números reales es *acotado superiormente* si existe un número $x \in \mathbf{R}$ tal que $a \leqq x$ para todo $a \in A$, y en tal caso, x se llama *cota superior* de A. Asimismo, se dice que A es *acotado inferiormente* si existe $y \in \mathbf{R}$ tal que $y \leqq a$ para todo $a \in A$, y entonces y se llama *cota inferior* de A. Por definición, un conjunto es acotado si lo es a la vez superior e inferiormente.

Se dice que u es el elemento mayor del conjunto A, si $u \in A$ y si $u \geqq a$ para todo $a \in A$. Un conjunto, aun acotado superiormente, puede no tener elemento mayor (cf. ejerc. 15).

Se dice que $v \in A$ es el elemento menor de A si $v \leqq a$ para todo $a \in A$. Está claro que un conjunto no puede tener más de un elemento mayor y uno menor (cf. ejerc. 5).

El *extremo superior,* sup A, de un conjunto acotado superiormente es el elemento menor del conjunto de las cotas superiores de A. En otras palabras, x = sup A si se cumplen las condiciones siguientes:

(i) $x \geqq a$ para todo $a \in A$;

(ii) si $y \in \mathbf{R}$ y además $y \geqq a$, cualquiera que sea $a \in A$, entonces $y \geqq x$.

Si A tiene un elemento mayor, entonces éste es el extremo superior de A. El *extremo inferior,* inf A, de un conjunto acotado inferiormente es el elemento mayor del conjunto de las cotas inferiores de A. Cabe ahora enunciar el último axioma de los números reales:

(Co) Todo conjunto no vacío de números reales acotado superiormente tiene un extremo superior.

Proposición 1.5. *Todo conjunto no vacío* $A \subset \mathbf{R}$ *acotado inferiormente tiene un extremo inferior.*

Demostración. Como es costumbre, denotaremos por -A el conjunto de los números $-a$, donde a recorre A. Si A es acotado inferiormente, -A es acotado superiormente, ya que $y \leqq a$ implica $-a \leqq -y$. En virtud del axioma (Co), el conjunto -A tiene un extremo superior x. Entonces $-x$ es extremo inferior de A. En efecto, $-a \leqq x$ para todo $a \in A$, implica $-x \leqq a$ para todo $a \in A$; además, si $z \leqq a$ para todo $a \in A$, entonces $-z \geqq -a$ para todo $a \in A$; luego, $-z \geqq x$ y $z \leqq -x$. ◊

Proposición 1.6. *Un número* $x \in \mathbf{R}$ *es el extremo superior del conjunto* $A \subset \mathbf{R}$ *si, y sólo si, se cumplen las dos condiciones siguientes:*

(i) $x \geqq a$ *cualquiera que sea* $a \in A$;

(ii') *si* $z \in \mathbf{R}$ *es tal que* $z < x$, *entonces existe* $a \in A$ *tal que* $a > z$.

Demostración. Hay que demostrar la equivalencia de (ii') y de la condición (ii) arriba.

(ii) ⇒ (ii'): Sea $z < x$. Si no existe $a \in A$ tal que $z < a$, entonces z es cota superior de A, luego, por (ii), tenemos que $z \geqq x$, lo que contradice la desigualdad $z < x$.

(ii') ⇒ (ii): Sea y una cota superior de A. Si fuera $y < x$, en virtud de (ii') existiría $a \in A$ tal que $y < a$, lo que es imposible. Así se tiene necesariamente $y \geqq x$. ◊

El cuerpo **R** de los números reales contiene, en particular, a los números naturales $0,\ 1,\ 2 = 1 + 1,\ 3 = 2 + 1, \ldots, n, n + 1, \ldots$

Proposición 1.7. *El conjunto* **N** *de los números naturales no es acotado superiormente en* **R.**

Demostración. Si **N** fuera acotado superiormente, entonces por el axioma (Co) tendría un extremo superior x. Puesto que $0 < \frac{1}{2} < 1$, por la prop. 1.6 existiría un número natural n tal que $n > x - \frac{1}{2}$ y, por consiguiente, $n + 1 > x + \frac{1}{2} > x$. Como $n + 1$ es un número natural, esto contradice al hecho de que x es extremo superior de **N.** ◇

Proposición 1.8. *Dado dos números reales* $a \geqq 0$ *y* $b > 0$ *existe un número natural* n *tal que* $a \leqq nb$ (axioma de Arquímedes).

Demostración. En el caso contrario se tendría $n < ab^{-1}$ para todo $n \in$ **N**, en contradicción con la prop. 1.7. ◇

Terminamos aquí este breve bosquejo de las propiedades de **R.** En particular no se ha dicho nada acerca de la existencia de **R**, ni de si los axiomas enumerados caracterizan a **R** de manera unívoca. Sobre esto y la demostración detallada de las propiedades de las operaciones definidas en **R** véase la monografía del Profesor César A. Trejo, publicada en esta colección, o el libro de Cohen y Ehrlich mencionado en la bibliografía.

Ejercicios

Demuéstrense las proposiciones siguientes:

1) El elemento $1 \in$ **R** es único.
2) Cada $a \in$ **R** tiene un opuesto y sólo uno.
3) Cada $a \in$ **R** diferente de cero, tiene un inverso y sólo uno.
4) Si $a \neq 0$, entonces la ecuación lineal $ax + b = 0$ tiene una sola solución x.
5) Si $a \leqq b$ y $b \leqq a$, entonces $a = b$.
6) Si $a \leqq b$ y $b < c$, o si $a < b$ y $b \leqq c$, entonces $a < c$.
7) Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$ para todo $c \in$ **R.**
8) Si $a \leqq b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$.
9) $a > 0$ si, y sólo si, $-a < 0$.
10) Si $a \leqq b$ y $c \leqq 0$, entonces $bc \leqq ac$.
11) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
12) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $bc < ac$.

13) $1 > 0$ (utilícese que $1 \cdot 1 = 1$).

14) $c > 0$ si, y sólo si, $c^{-1} > 0$.

15) El conjunto de los números reales estrictamente negativos es acotado superiormente, pero carece de elemento mayor.

§ 2. Vecindades; Conjuntos Abiertos y Cerrados

En esta sección se definirán los primeros conceptos topológicos relativos a $\mathbf{R}$. Los números reales se llamarán también puntos de la recta real $\mathbf{R}$.

Definición 2.1. *Se llama intervalo abierto a un subconjunto de* $\mathbf{R}$ *de uno de los cuatro tipos siguientes:*

el conjunto $]a, b[$ *de todos los números reales* x *que satisfacen las desigualdades* $a < x < b$, *donde* a *y* b *son dos números reales dados tales que* $a < b$;

el conjunto $]a, \rightarrow[$ *de todos los números reales* x *que satisfacen la desigualdad* $x > a$, *donde* a *es un número real dado;*

el conjunto $]\leftarrow, a[$ *de todos los números reales* x *que satisfacen la desigualdad* $x < a$, *donde* a *es un número real dado;*

toda la recta real $\mathbf{R} =]\leftarrow, \rightarrow[$.

Definición 2.2. *Se llama intervalo cerrado a un subconjunto de* $\mathbf{R}$ *de uno de los tres tipos siguientes*

el conjunto $[a, b]$ *de todos los números reales* x *que satisfacen las desigualdades* $a \leqq x \leqq b$, *donde* a *y* b *son dos números reales dados tales que* $a \leqq b$;

el conjunto $[a, \rightarrow[$ *de todos los números reales* x *que satisfacen la desigualdad* $x \geqq a$, *donde* a *es un número real dado;*

el conjunto $]\leftarrow, a]$ *de todos los números reales* x *que satisfacen la desigualdad* $x \leqq a$, *donde* a *es un número real dado.*

Definición 2.3. *Sean* a *y* b *dos números reales tales que* $a < b$. *Se llama intervalo abierto a la izquierda y cerrado a la derecha al conjunto* $]a, b]$ *de todos los* $x \in \mathbf{R}$ *tales que* $a < x \leqq b$. *Se llama intervalo cerrado a la izquierda y abierto a la derecha al conjunto* $[a, b[$ *de todos los* $x \in \mathbf{R}$ *tales que* $a \leqq x < b$.

Los intervalos de los tipos $]a, b[$, $[a, b]$, $]a, b]$ y $[a, b[$ se dicen *finitos*. Los puntos a y b son los extremos del intervalo: a

el extremo izquierdo, y b el extremo derecho. El número $b-a$ es la *longitud* del intervalo.

Los intervalos de los tipos $]\leftarrow, a[$, $]\leftarrow, a]$, $]b, \rightarrow[$, $[b, \rightarrow[$, $]\leftarrow, \rightarrow[$ se dicen *infinitos;* a es el extremo derecho y b el extremo izquierdo del intervalo correspondiente.

Definición 2.4. *Se llama vecindad de un punto* $x \in \mathbf{R}$ *a un conjunto* V *que contiene un intervalo abierto* I, *el cual, a su vez, contiene a* x.

Siempre se puede suponer que I es finito. En efecto, si por ejemplo V contiene el intervalo $]a, \rightarrow[$ y $x \in]a, \rightarrow[$, sea b un número tal que $b > x$ (tal número existe en virtud de la prop. 1.7). Entonces $V \supset]a, b[$ y $x \in]a, b[$.

El punto $c = \frac{1}{2}(a + b)$ se llama el *punto medio* del intervalo $]a, b[$. Se tiene $b - c = c - a = \frac{1}{2}(b - a) = r$, es decir $a = c - r$, $b = c + r$. Se dice también que $]a, b[=]c - r, c + r[$ es *simétrico* con respecto a c.

Si V es una vecindad del punto x, entonces V contiene un intervalo abierto simétrico con respecto a x. En efecto, V contiene un intervalo $]a, b[$ tal que $x \in]a, b[$. Sea ϵ el menor de los dos números estrictamente positivos $b - x$ y $x - a$. Entonces, V contiene a $]x - \epsilon, x + \epsilon[$. En otras palabras:

Proposición 2.1. *El conjunto* V *es una vecindad del punto* $x \in \mathbf{R}$ *si, y sólo si, existe un número estrictamente positivo* ϵ *tal que la condición* $|x - y| < \epsilon$ *implica* $y \in V$.

Demostración. Según la teoría elemental de los valores absolutos, $|x - y| < \epsilon$ es equivalente a $-\epsilon < x - y < \epsilon$, o bien a $x - \epsilon < y < x + \epsilon$, o sea a $y \in]x - \epsilon, x + \epsilon[$. Luego la condición del teorema significa que V contiene el intervalo $]x - \epsilon, x + \epsilon[$. ◊

La proposición siguiente resume aquellas propiedades de las vecindades que nos servirán en el capítulo 4 para definir el concepto abstracto de vecindad. Dado un punto $x \in \mathbf{R}$ denotemos por $\mathcal{V}(x)$ la colección de todas las vecindades de x.

Proposición 2.2. (i) *Si* $V \in \mathcal{V}(x)$ *y* U *es un conjunto que contiene* V, *entonces* $U \in \mathcal{V}(x)$.

(ii) *Si* $U \in \mathcal{V}(x)$ *y* $V \in \mathcal{V}(x)$, *entonces* $U \cap V \in \mathcal{V}(x)$.

(iii) *Para cada* $V \in \mathcal{V}(x)$ *se tiene* $x \in V$.

(iv) *Para cada* $V \in \mathcal{V}(x)$ *existe* $W \in \mathcal{V}(x)$ *tal que para todo* $y \in W$, *el conjunto* V *es una vecindad de* y.

Demostración. (i) resulta de la definición. Para demostrar (ii) supóngase que U contiene el intervalo $]x - \epsilon, \ x + \epsilon[$ y que V contiene el intervalo $]x - \eta, \ x + \eta[$, donde $\epsilon > 0$, $\eta > 0$. Sea ζ el menor de los números ϵ y η. Entonces $U \cap V$ contiene $]x - \zeta, \ x + + \zeta[$.

(iii) es evidente. Demostremos (iv). Si $V \in \mathcal{V}(x)$, entonces V contiene un intervalo $]x - \epsilon, \ x + \epsilon[$, y basta tomar $W =]x - \epsilon, \ x + + \epsilon[$. ◇

Definición 2.5. *Sea* M *un subconjunto de* **R**. *Un punto* $a \in \mathbf{R}$ *es punto interior de* M *si existe una vecindad* V *de* a *tal que* $V \subset M$. *Un punto* $b \in \mathbf{R}$ *es un punto exterior a* M *si existe una vecindad* V *de* b *tal que* $V \cap M = \emptyset$. *Un punto* $c \in \mathbf{R}$ *es un punto frontera de* M *si toda vecindad de* c *contiene puntos que pertenecen a* M *y puntos que no pertenecen a* M.

Ejemplo 2.1. Sea I un intervalo finito con extremos a y b. Entonces los puntos interiores de I son los que pertenecen al intervalo abierto $]a, b[$, los puntos frontera son a y b y los puntos exteriores son los puntos x tales que $x < a$ ó $x > b$. La primera afirmación resulta de ser $]a, b[$ una vecindad de todos los puntos que contiene. Para demostrar que, por ejemplo, a es punto frontera, supóngase primero que $b > a$. En tal caso cada intervalo $]a - - \epsilon, \ a + \epsilon[$ contiene puntos x con $x < a$ que no pertenecen al intervalo I, y contiene puntos que satisfacen a $a < x < b$, es decir, que pertenecen a I. Si ahora $a = b$, entonces I es el intervalo cerrado que sólo contiene el punto a y, por consiguiente, cada intervalo $]a - \epsilon, \ a + \epsilon[$ contiene a y también puntos que no pertenecen a I. Finalmente, sea por ejemplo $x < a$ y escribamos $\epsilon = a - x$. Entonces el intervalo $]x - \epsilon, \ x + \epsilon[$ es disjunto de I.

De lo anterior resulta que I es abierto si, y sólo si, todos sus puntos son interiores, y que I es cerrado si, y sólo si, contiene sus puntos frontera.

De modo análogo se puede ver que si I es, por ejemplo, un intervalo infinito del tipo $]a, \rightarrow[$ ó $[a, \rightarrow[$, entonces los puntos x tales que $x > a$ son interiores a I, los puntos x tales que $x < a$ son exteriores, y a es punto frontera de I.

La propiedad característica de los intervalos abiertos explicada en el ejemplo anterior conduce a la definición siguiente:

Definición 2.6. *Un subconjunto* A *de* **R** *es abierto si cada punto de* A *es punto interior de* A.

La proposición siguiente enuncia las propiedades de los conjuntos abiertos en **R** que pueden servir para definirlos en un espacio topológico (capítulo cuarto).

Proposición 2.3. (i) *El conjunto vacío y la recta real* **R** *son conjuntos abiertos.*

(ii) *Si* A *y* B *son conjuntos abiertos, también* $A \cap B$ *es un conjunto abierto.*

(iii) *Si* $(A_\iota)_{\iota \in I}$ *es una familia arbitraria de conjuntos abiertos, también* $\bigcup_{\iota \in I} A_\iota$ *es un conjunto abierto.*

Demostración. (i) es evidente. Sean A y B dos conjuntos abiertos y sea $x \in A \cap B$. Existe pues una vecindad U de x contenida en A, y una vecindad V de x contenida en B. Por la prop. 2.2. (ii), el conjunto $U \cap V$ es una vecindad de x, y se tiene $U \cap V \subset A \cap$ $\cap B$.

Finalmente, si los A_ι son abiertos y $x \in \bigcup_{\iota \in I} A_\iota$, entonces x pertenece a un conjunto A_ι. Luego existe una vecindad V de x tal que $V \subset A_\iota$, y con más razón $V \in \bigcup_{\iota \in I} A_\iota$. ◇

Definición 2.7. *El conjunto de todos los puntos interiores de un conjunto* $A \subset \mathbf{R}$ *se llama el interior de* A *y se denota por* $\mathring{A}$.

De la def. 2.5 y la prop. 2.2. (iii) resulta que $\mathring{A} \subset A$. Además $A = \mathring{A}$ si, y sólo si, A es abierto.

Proposición 2.4. *El interior* $\mathring{A}$ *de cualquier conjunto* A *es abierto.*

Demostración. Sea x un punto de $\mathring{A}$. Entonces existe una vecindad V de x tal que $V \subset A$. En virtud de la prop. 2.2 (iv) existe una vecindad W de x tal que, para cada $y \in W$, el conjunto V es una vecindad de y. Puesto que $V \subset A$, resulta que cada $y \in W$ pertenece a $\mathring{A}$, es decir, $W \subset \mathring{A}$. ◇

Proposición 2.5. *Un conjunto* V *es vecindad del punto* x *si, y sólo si, contiene un conjunto abierto que, a su vez, contiene a* x.

Demostración. Si V es una vecindad de x, entonces en virtud de la prop. 2.2 (iv) existe una vecindad W de x tal que, para cada

$y \in W$, el conjunto V es una vecindad de y. Por consiguiente, $W \subset \subset \mathring{V}$ y según la prop. 2.4 el conjunto $\mathring{V}$ es abierto.

Inversamente, supóngase que V contiene el conjunto abierto A tal que $x \in A$. Entonces existe una vecindad U de x tal que $U \subset A$ y, con más razón, $U \subset V$. En virtud de la prop. 2.2 (i), el conjunto V es una vecindad de x. ◊

Proposición 2.6. *El interior* $\mathring{A}$ *de un conjunto* A *es la reunión de todos los conjuntos abiertos contenidos en* A.

Demostración. Sea B un conjunto abierto contenido en A, y sea x un punto de B. Entonces B es una vecindad de x contenida en A, de manera que $x \in \mathring{A}$ y, por consiguiente, $B \subset \mathring{A}$, es decir, $\mathring{A}$ contiene todos los conjuntos abiertos contenidos en A.

Inversamente, sea x un punto de $\mathring{A}$. Entonces existe una vecindad V de x contenida en A, y por la prop. 2.5, existe un conjunto abierto B tal que $x \in B \subset V \subset A$. Esto significa que $\mathring{A}$ está contenido en la reunión de los conjuntos abiertos contenidos en A. ◊

Definición 2.8. *Se dice que el punto* $a \in \mathbf{R}$ *es adherente al conjunto* $M \subset \mathbf{R}$ *si cada vecindad de* a *contiene por lo menos un punto de* M.

Es claro que los puntos adherentes a M son los puntos interiorres de M y sus puntos frontera.

Definición 2.9. *El conjunto de todos los puntos adherentes a un conjunto* $M \subset \mathbf{R}$ *se llama la adherencia* (o cerradura) *de* M, *y se denota por* $\bar{M}$. *Un conjunto* $F \subset \mathbf{R}$ *es cerrado si* $F = \bar{F}$.

En virtud de la prop. 2.2 (iii), se tiene siempre $M \subset \bar{M}$. Del ejemplo 2.1 resulta que un intervalo distinto de $\mathbf{R}$ es un intervalo cerrado si, y sólo si, es un conjunto cerrado.

Proposición 2.7. *Si* M *es un subconjunto cualquiera de* $\mathbf{R}$, *entonces* $\complement\bar{M} = (\complement M)^{\circ}$.

Demostración. Un punto $a \in \mathbf{R}$ pertenece a $\complement\bar{M}$ si, y sólo si, es punto exterior de M, es decir, punto interior de $\complement M$. ◊

Proposición 2.8. *Un conjunto* M *es cerrado si, y sólo si,* $\complement M$ *es abierto.*

Demostración. En virtud de la prop. 2.7, la relación $M = \bar{M}$ es equivalente a $\complement M = (\complement M)^{\circ}$. ◊

Proposición 2.9. *La adherencia* $\bar{M}$ *de cualquier conjunto* M *es un conjunto cerrado.*

Demostración. Según la prop. 2.7, se tiene $\complement\bar{M} = (\complement M)^{\circ}$. Ahora bien, en virtud de la prop. 2.4, el conjunto $(\complement M)^{\circ}$ es abierto; luego, en virtud de la prop. 2.8, el conjunto $\bar{M}$ es cerrado. ◊

Proposición 2.10. *La adherencia* $\bar{M}$ *de un conjunto* M *es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a* M.

Demostración. Sea F un conjunto cerrado que contiene a M, y sea x un punto adherente a M. Entonces x es, con más razón, adherente a F y, por consiguiente, $x \in F$. De esta manera, $\bar{M}$ está contenido en la intersección de los conjuntos cerrados que contienen a M.

Inversamente, sea x un punto no adherente a M. Entonces x es punto interior de $\complement M$ y, por lo tanto, existe una vecindad abierta (prop. 2.5) V de x tal que $V \cap M = \emptyset$. El conjunto $F = \complement V$ es cerrado (prop. 2.8), contiene a M y no contiene a x. Esto demuestra que la intersección de los conjuntos cerrados que contienen a M está contenida en $\bar{M}$. ◊

Proposición 2.11. (i) *El conjunto vacío y la recta real* **R** *son conjuntos cerrados.*

(ii) *Si* F *y* G *son conjuntos cerrados, entonces* $F \cup G$ *es un conjunto cerrado.*

(iii) *Si* $(F_\iota)_{\iota \in I}$ *es una familia arbitraria de conjuntos cerrados, entonces* $\bigcap_{\iota \in I} F_\iota$ *es un conjunto cerrado.*

Demostración. (i) es evidente. Sea x un punto adherente a $F \cup G$. Entonces x es adherente a F, o lo es a G. En efecto, si existe una vecindad U de x tal que $U \cap F = \emptyset$, y una vecindad V de x tal que $V \cap G = \emptyset$, entonces $U \cap V$ es una vecindad de x (prop. 2.2 (ii)) que no contiene punto alguno de $F \cup G$, en contradicción con $x \in \overline{F \cup G}$. Supóngase, por ejemplo, que $x \in \bar{F}$. Entonces $x \in F$, puesto que F es cerrado. Con más razón $x \in F \cup G$, lo que prueba que $F \cup G$ es cerrado.

Finalmente si x es adherente a $\bigcap_{\iota \in I} F_\iota$, con más razón lo es a cada F_ι, luego $x \in F_\iota$ para cada $\iota \in I$, de donde $x \in \bigcap_{\iota \in I} F_\iota$. ◊

Ejercicios

1) Sea I un intervalo finito con extremo izquierdo a y extremo derecho b. Demuéstrese que a es el extremo inferior y b el extremo superior del conjunto I.

2) Sean a y b dos puntos distintos de $\mathbf{R}$. Demuéstrese que existe una vecindad U de a y una vecindad V de b tales que $U \cap V = \emptyset$ (axioma de Hausdorff).

3) Los puntos frontera de un conjunto A forman la frontera A^* de A.

a) Demúestrese que $A^* = (\complement A)^*$ para todo conjunto $A \subset \mathbf{R}$.

b) Demuéstrese que, cualquiera que sea el subconjunto A de $\mathbf{R}$, se tiene $\mathbf{R} = \mathring{A} \cup A^* \cup (\complement A)^\circ$, donde los tres conjuntos son disjuntos dos a dos y $(\complement A)^\circ$ es el conjunto de los puntos exteriores a A.

c) Demúestrese que $\bar{A} = \mathring{A} \cup A^*$.

4) Demuéstrese que un conjunto $A \subset \mathbf{R}$ es abierto si, y sólo si, es vecindad de cada uno de sus puntos.

5) Se dice que el conjunto V es vecindad del conjunto A si V contiene un conjunto abierto que a su vez contiene a A. Demuéstrese que A es abierto si, y sólo si, es su propia vecindad.

6) Demuéstrese que si $A \subset B$, entonces $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ y $\bar{A} \subset \bar{B}$.

7) Sean A y B dos conjuntos. Demuéstrese que $(A \cap B)^\circ = \mathring{A} \cap \mathring{B}$ y $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

8) Dése un ejemplo de dos conjuntos A y B para los cuales $(A \cup B)^\circ \neq$ $\neq \mathring{A} \cup \mathring{B}$.

9) Demuéstrese que cada vecindad de un punto $x \in \mathbf{R}$ contiene una vecindad cerrada de x (regularidad).

10) Demuéstrese la prop. 2.11 a partir de la prop. 2.3 mediante la prop. 2.8 y la fórmula de De Morgan.

$$\complement\left(\bigcup_{\iota \in I} A_\iota\right) = \bigcap_{\iota \in I} \complement A_\iota .$$

§ 3. Topología Relativa

Vamos ahora a definir los conceptos adoptados en la sección anterior con respecto a toda la recta real $\mathbf{R}$ también relativos a un subconjunto X de $\mathbf{R}$. La necesidad de una definición tal se debe, entre otras razones, a que con frecuencia se hallan funciones que no están definidas en todo $\mathbf{R}$, sino sólo en un subconjunto de $\mathbf{R}$, como, por ejemplo, la función $x \mapsto \sqrt{x}$ que sólo está definida para valores de x positivos.

La terminología que sigue es de gran utilidad en esta sección. Sea X un subconjunto fijo de $\mathbf{R}$; dado ahora un subconjunto cualquiera A de $\mathbf{R}$, se llama *traza* de A sobre X al conjunto $A \cap X$ considerado como subconjunto de X.

Definición 3.1. *Sea* X *un subconjunto de* $\mathbf{R}$ *y* x *un punto de* X. *Un conjunto* $V \subset X$ *se llama una vecindad de* x *relativa a* X *si existe una vecindad* U *de* x *en* $\mathbf{R}$ *tal que* V *sea la traza de* U *sobre* X.

Para $x \in X$ denótese por $\mathcal{V}_X(x)$ la colección de todas las vecindades de x relativas a X.

Proposición 3.1. (i) *Si* $V \in \mathcal{V}_X(x)$ *y* U *es un subconjunto de* X *que contiene a* V, *entonces* $U \in \mathcal{V}_X(x)$.

(ii) *Si* $U \in \mathcal{V}_X(x)$ *y* $V \in \mathcal{V}_X(x)$, *entonces* $U \cap V \in \mathcal{V}_X(x)$.

(iii) *Para cada* $V \in \mathcal{V}_X(x)$ *se tiene* $x \in V$.

(iv) *Para cada* $V \in \mathcal{V}_X(x)$ *existe una* $W \in \mathcal{V}_X(x)$ *tal que para todo* $y \in W$ *el conjunto* V *es una vecindad de* y *relativa a* X.

Demostración. (i) Si $V \in \mathcal{V}_X(x)$, entonces existe una vecindad V_1 de x en $\mathbf{R}$ tal que $V = V_1 \cap X$. En virtud de la prop. 2.2 (i), el conjunto $U_1 = U \cup V_1$ es una vecindad de x en $\mathbf{R}$, y puesto que $U_1 \cap X = (U \cap X) \cup (V_1 \cap X) = U \cup V = U$, se sigue que $U \in \mathcal{V}_X(x)$.

(ii) Si $U \in \mathcal{V}_X(x)$ y $V \in \mathcal{V}_X(x)$, entonces existen $U_1 \in \mathcal{V}(x)$ y $V_1 \in \mathcal{V}(x)$ tales que $U = U_1 \cap X$ y $V = V_1 \cap X$. En virtud de la prop. 2.2 (ii), se tiene $U_1 \cap V_1 \in \mathcal{V}(x)$ y, por consiguiente, $U \cap V = (U_1 \cap V_1) \cap X \in \mathcal{V}_X(x)$.

(iii) Si $V \in \mathcal{V}_X(x)$, entonces existe $V_1 \in \mathcal{V}(x)$ tal que $V = V_1 \cap X$. Ahora bien, $x \in V_1$ en virtud de la prop. 2.2 (iii), y como $x \in X$ por definición, se tiene $x \in V$.

(iv) Sea $V \in \mathcal{V}_X(x)$, y sea $V_1 \in \mathcal{V}(x)$ tal que $V = V_1 \cap X$. En virtud de la prop. 2.2 (iv), existe un $W_1 \in \mathcal{V}(x)$ tal que $V_1 \in \mathcal{V}(y)$ para todo $y \in W_1$. Pongamos $W = W_1 \cap X$. Entonces $W \in \mathcal{V}_X(x)$ por definición. Por otra parte, para todo $y \in W$, el conjunto $V = V_1 \cap X$ es una vecindad de y relativa a X. ◇

Definición 3.2. *Sea* X *un subconjunto fijo de* $\mathbf{R}$. *Se dice que el punto* $a \in X$ *es punto interior del conjunto* $A \subset X$ *relativo a* X *si existe una* $V \in \mathcal{V}_X(a)$ *tal que* $V \subset A$. *El conjunto de todos los puntos interiores de* A *relativos a* X *se llama el interior de* A *relativo a* X *y se denota* $(A)^\circ_X$.

De la prop. 3.1 (iii) resulta que $(A)^\circ_X \subset A$ para todo conjunto $A \subset X$.

Definición 3.3. *Un subconjunto* A *de* X *es abierto relativo a* X *si todos los puntos de* A *son puntos interiores de* A *relativos a* X, *es decir si* $A = (A)^\circ_X$.

Proposición 3.2. *Un subconjunto* A *de* X *es abierto relativo a* X *si, y sólo si, es la traza sobre* X *de un subconjunto abierto de* $\mathbf{R}$.

Demostración. Sea $A \subset X$ un conjunto abierto relativo a X. Para cada $a \in A$ existe una vecindad $V_a \in \mathcal{V}_X(a)$ tal que $V_a \subset A$, y, desde luego, una vecindad U_a de a en $\mathbf{R}$ tal que $V_a = U_a \cap X$. Sea B la reunión de todos los conjuntos $U_a (a \in A)$. Entonces el interior $\overset{\circ}{B}$ de B es un subconjunto abierto de $\mathbf{R}$ en virtud de la prop. 2.4. Si $x \in \overset{\circ}{B} \cap X$, entonces $x \in B$, y por consiguiente x pertenece a un conjunto U_a; como también $x \in X$, resulta que $x \in U_a \cap X = V_a \subset A$, es decir $\overset{\circ}{B} \cap X \subset A$. Por otra parte, si $a \in A$, entonces $a \in U_a \subset \overset{\circ}{B}$, de donde resulta que $a \in \overset{\circ}{B}$; y como también $a \in X$, se tiene $a \in \overset{\circ}{B} \cap$ $\cap X$, es decir, $A \subset \overset{\circ}{B} \cap X$. Así queda demostrado que $A = \overset{\circ}{B} \cap X$.

20

Inversamente, sea $A = B \cap X$, donde B es un subconjunto abierto de $\mathbf{R}$. Para cada punto $a \in A$ existe $U \in \mathcal{V}(a)$ tal que $U \subset B$. Por tanto $V = U \cap X \in \mathcal{V}_X(a)$ y $V \subset A$. ◇

Corolario. *Para que todo subconjunto de* X, *abierto relativo a* X, *sea también un conjunto abierto en* $\mathbf{R}$ *es necesario y suficiente que* X *sea un subconjunto abierto de* $\mathbf{R}$.

Demostración. La condición es necesaria puesto que $X = \mathbf{R} \cap$ $\cap X$ es un subconjunto abierto de X relativo a X. Inversamente, si X es abierto en $\mathbf{R}$, entonces para cada subconjunto abierto B de $\mathbf{R}$ el conjunto $A = B \cap X$ es un subconjunto abierto de $\mathbf{R}$ (prop. 2.3 (ii)). ◇

Proposición 3.3. (i) *El conjunto vacío y el conjunto* X *son conjuntos abiertos relativos a* X.

(ii) *Si* A *y* B *son dos conjuntos abiertos relativos a* X, *entonces* $A \cap B$ *es un conjunto abierto relativo a* X.

(iii) *Si* $(A_\iota)_{\iota\in I}$ *es una familia arbitraria de conjuntos abiertos relativos a* X, *entonces* $\bigcup_{\iota\in I} A_\iota$ *es abierto relativo a* X.

La demostración es casi la misma que la de la prop. 2.3, con la sola diferencia de que hay que utilizar vecindades relativas a X, y la prop. 3.1 (ii), en vez de la prop. 2.2 (ii).

Proposición 3.4. *El interior* $(A)^\circ_X$ *relativo a* X *de cualquier conjunto* $A \subset X$ *es abierto relativo a* X.

Misma demostración que la de la prop. 2.4 utilizando vecindades relativas y la prop. 3.1 (iv), en vez de la prop. 2.2 (iv).

Proposición 3.5. *Un conjunto* $V \subset X$ *es una vecindad del punto* $x \in X$ *relativa a* X *si, y sólo si,* V *contiene un conjunto abierto relativo a* X *que contiene a* x.

Esto resulta de las proposiciones 3.1 y 3.4, exactamente como la prop. 2.5 resultó de las proposiciones 2.2 y 2.4.

Proposición 3.6. *El interior* $(A)^\circ_X$ *relativo a* X *de un conjunto* $A \subset X$ *es la reunión de todos los conjuntos abiertos relativos a* X *contenidos en* A.

Se demuestra como la prop. 2.6, pero se utilizan vecindades relativas y la prop. 3.5, en vez de la prop. 2.5.

Definición 3.4. *Un punto* $a \in X$ *es adherente al conjunto* $M \subset X$ *relativo a* X *si toda vecindad* $V \in \mathcal{V}_X(a)$ *contiene por lo menos un punto de* M. *El conjunto de todos los puntos adherentes a* M *relativos a* X *forman la adherencia de* M *relativa a* X, *la cual se denota por* $(M)^-_X$.

De la prop. 3.1 (iii) resulta que $M \subset (M)^-_X$ para todo conjunto $M \subset X$.

Definición 3.5. *Un subconjunto* $F \subset X$ *es cerrado relativo a* X *si contiene todos los puntos adherentes relativos a* X, *es decir si* $F = (F)^-_X$.

Proposición 3.7. *Un subconjunto* F *de* X *es cerrado relativo a* X *si, y sólo si, es la traza sobre* X *de un subconjunto cerrado de* **R**.

Demostración. Sea $F \subset X$ un conjunto cerrado relativo a X. La adherencia $\bar{F}$ de F en **R** es un subconjunto cerrado de **R** en virtud de la prop. 2.9. Sea x un punto de $\bar{F} \cap X$, y sea V una vecindad de x relativa a X. Existe una vecindad U de x en **R** tal que $V = U \cap \cap X$, y la condición $x \in \bar{F}$ implica que $U \cap F \neq \emptyset$. Puesto que $F \subset X$, se tiene $V \cap F \neq \emptyset$. Por consiguiente $x \in (F)^{-}_{X} = F$, es decir, $\bar{F} \cap \cap X \subset F$. Por otra parte, es evidente que $F \subset \bar{F} \cap X$, y de esta manera queda demostrado que $F = \bar{F} \cap X$.

Inversamente, supóngase que $F = D \cap X$, donde D es un subconjunto cerrado de **R**, y sea x un punto de X adherente a F relativo a X. Entonces con más razón x es adherente a D en **R**, y por lo tanto $x \in D$, ya que D es cerrado. De tal manera $x \in D \cap X = F$, lo que demuestra que F es cerrado relativo a X. ◇

Corolario. *Para que todo subconjunto de* X, *cerrado relativo a* X, *sea también un conjunto cerrado en* **R** *es necesario y suficiente que* X *sea un subconjunto cerrado de* **R**.

Demostración. La condición es necesaria puesto que $X = \mathbf{R} \cap X$ es un subconjunto cerrado relativo a X de X. Inversamente, si X es cerrado en **R**, entonces para cada subconjunto cerrado D de **R** el conjunto $F = D \cap X$ es un subconjunto cerrado de **R** (prop. 2.11 (iii)). ◇

Proposición 3.8. *Un conjunto* $M \subset X$ *es cerrado relativo a* X *si, y sólo si,* $\complement_X M$ *es abierto relativo a* X.

Demostración. Si M es cerrado relativo a X, entonces $M = = D \cap X$, donde D es cerrado en **R** (prop. 3.7). Luego $\complement D = A$ es abierto en **R**, y por lo tanto $\complement_X M = A \cap X$ es abierto relativo a X (prop. 3.2). Inversamente, si $\complement_X M$ es abierto relativo a X, entonces $\complement_X M = A \cap X$, donde A es abierto en **R** (prop. 3.2). Luego $\complement A = = D$ es cerrado en **R** (prop. 2.8), y por lo tanto $M = \complement_X(\complement_X M) = D \cap X$ es cerrado relativo a X (prop. 3.7). ◇

Proposición 3.9. (i) *El conjunto vacío y el conjunto* X *son conjuntos cerrados relativos a* X.

(ii) *Si* F *y* G *son dos conjuntos cerrados relativos a* X, *entonces* $F \cup G$ *es un conjunto cerrado relativo a* X.

(iii) *Si* $(F_\iota)_{\iota \in I}$ *es una familia arbitraria de conjuntos cerrados relativos a* X, *entonces* $\bigcap_{\iota \in I} F_\iota$ *es un conjunto cerrado relativo a* X.

Esto resulta inmediatamente de las proposiciones 2.11 y 3.7. Dejamos los detalles al lector.

Ejercicios

1) Demuéstrese que si $X \subset Y$, $(A)^{\circ}_{X} \supset (A)^{\circ}_{Y}$ para todo conjunto $A \subset \subset X$.

2) Dése la demostración completa de las proposiciones 3.3 a 3.6.

3) Dése la demostración detallada de la prop. 3.9.

4) Demuéstrese que para cada subconjunto M de X se tiene $(M)_X^- = \bar{M} \cap X$ (utilícese el método de demostración de la prop. 3.7). En particular $(M)_X^-$ es cerrado relativo a X cualquiera que sea el conjunto $M \subset X$.

5) Defínase los puntos frontera y los puntos exteriores relativos a X de un conjunto $M \subset X$.

6) Enúnciese y demuéstrese las análogas de las proposiciones 2.7 y 2.10 relativas a un conjunto $X \subset \mathbf{R}$.

7) Demuéstrese que cada subconjunto de $\mathbf{N} \subset \mathbf{R}$ es abierto y cerrado relativo a $\mathbf{N}$.

§ 4. Sucesiones Convergentes

Una sucesión de números reales es una función que a cada número natural $n \in \mathbf{N}$ asigna un número real $x_n \in \mathbf{R}$. En vez de la notación $n \mapsto x_n$, es costumbre escribir $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ o simplemente (x_n).

Se dice que una sucesión (x_n) es creciente si $x_n \leqq x_{n+1}$ para cada $n \in \mathbf{N}$. Si para todo $n \in \mathbf{N}$ se tiene $x_n < x_{n+1}$, se dice que la sucesión (x_n) es estrictamente creciente. Del mismo modo, se dice que (x_n) es decreciente si $x_n \geqq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbf{N}$, y estrictamente decreciente si $x_n > x_{n+1}$ cualquiera que sea $n \in \mathbf{N}$.

La sucesión $(y_k)_{k \in \mathbf{N}}$ se llama una subsucesión de la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ si existe una sucesión estrictamente creciente de números naturales $(n_k)_{k \in \mathbf{N}}$ tal que $y_k = x_{n_k}$ para todo $k \in \mathbf{N}$. En tal caso, la sucesióm (y_k) se suele escribir $(x_{n_k})_{k \in \mathbf{N}}$ o, simplemente (x_{n_k}).

Definición 4.1. *Sea (x_n) una sucesión de números reales. Se dice que (x_n) converge o tiende hacia el número $x \in \mathbf{R}$, o que x es el límite de (x_n), si para cada número estrictamente positivo ϵ se puede elegir un número entero positivo* $N = N(\epsilon)$ *tal que* $|x - x_n| \leqq \epsilon$, *para todo entero n que satisfaga la condición* $n \geqq N(\epsilon)$.

Se expresa que x es el límite de la sucesión (x_n) por $x = \lim_{n \to \infty} x_n$. Se dice que una sucesión (x_n) es convergente, o que converge, si existe un punto $x \in \mathbf{R}$ hacia el cual converge.

Proposición 4.1. *La sucesión (x_n) converge hacia x si, y sólo si, para cada vecindad* V *de x existe un número entero positivo* N(V) *tal que* $x_n \in V$ *cualquiera que sea* $n \geqq N(V)$.

Demostración. Supóngase que (x_n) tiende hacia x, y sea V una vecindad de x. En virtud de la prop. 2.1, existe un número estrictamente positivo ϵ, tal que $|x - y| < \epsilon$ implica $y \in V$. Sea $N(\frac{\epsilon}{2}) \in \mathbf{N}$ tal que $|x - x_n| \leq \frac{\epsilon}{2}$ para $n \geq N(\frac{\epsilon}{2})$. Tomando $N(V) = N(\frac{\epsilon}{2})$, se tiene $x_n \in V$ para cualquier $n \geq N(V)$.

Inversamente, supóngase que para cada vecindad V de x existe $N(V) \in \mathbf{N}$ tal que $x_n \in V$ para $n \geq N(V)$, y sea ϵ un número estrictamente positivo. Entonces $V = [x - \epsilon, x + \epsilon]$ es una vecindad de x, y tomando $N(\epsilon) = N(V)$, se tiene $x \in V$, es decir $|x - x_n| \leq \epsilon$, para $n \geq N(\epsilon)$. Por consiguiente (x_n) converge hacia x. ◇

Proposición 4.2. *El punto $a \in \mathbf{R}$ es adherente al conjunto $M \subset \mathbf{R}$ si, y sólo si, existe una sucesión (x_n) de puntos $x_n \in M$ cuyo límite es a.*

Demostración. Supóngase que a es adherente a M. Entonces para todo $n \in \mathbf{N}$, el intervalo $[a - \frac{1}{n+1}, a + \frac{1}{n+1}]$ es una vecindad de a, y por lo tanto contiene un punto $x_n \in M$ (def. 2.8). Dado un número estrictamente positivo ϵ existe un entero positivo $N(\epsilon)$ tal que $[N(\epsilon) + 1]^{-1} \leq \epsilon$ (prop. 1.7). Luego, para $n \geq N(\epsilon)$ se tiene $|a - x_n| \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N(\epsilon)+1} \leq \epsilon$, es decir, (x_n) tiende hacia a.

Inversamente, supóngase que existe una sucesión (x_n) de puntos de M que tiende hacia a. Dada una vecindad V de a, existe, en virtud de la prop. 4.1, un $x_n \in M$ que pertenece a V. Por lo tanto a es adherente a M (def. 2.8). ◇

Una función f definida en un conjunto cualquiera X y con valores en el conjunto de los números reales $\mathbf{R}$ se dice acotada superiormente si existe un número $d \in \mathbf{R}$ tal que $f(x) \leq d$ para todo $x \in X$, es decir, si el conjunto $\{f(x) | x \in X\}$ es acotado superiormente. En particular, una sucesión de números reales (x_n) es acotada superiormente si existe $d \in \mathbf{R}$ tal que $x_n \leq d$ para todo $n \in \mathbf{N}$. De manera semejante, una función f es acotada inferiormente si existe $c \in \mathbf{R}$ tal que $f(x) \geq c$ para todo $x \in X$. Si una función es acotada superior e inferiormente se dice que es acotada.

Teorema 4.1. *Toda sucesión creciente y acotada superiormente es convergente.*

Demostración. Si (x_n) es una sucesión acotada superiormente, entonces, en virtud del axioma (Co), el conjunto $\{x_n | n \in \mathbf{N}\}$ tiene un extremo superior x. Dado $\epsilon > 0$, en virtud de la prop. 1.6, existe un elemento x_N tal que $x - \epsilon < x_N$. Si, además, la sucesión es creciente, tenemos $x - \epsilon < x_N \leqq x_n \leqq x$ para $n \geqq N$. Por consiguiente, $|x - x_n| \leqq \epsilon$ para $n \geqq N$, es decir, (x_n) converge hacia x. ◊

Sea (x_n) una sucesión de números reales que converge hacia el número x. Dado $\epsilon > 0$, existe $N(\frac{\epsilon}{2})$ tal que $|x - x_n| \leqq \frac{\epsilon}{2}$ para $n \geqq N(\frac{\epsilon}{2})$. En virtud de una propiedad bien conocida de los valores absolutos (desigualdad del triángulo, véase cap. segundo, § 1) tenemos $|x_n - x_m| \leqq |x - x_n| + |x - x_m| \leqq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ para $n, m \geqq N(\frac{\epsilon}{2})$. Esto conduce a la definición siguiente:

Definición 4.2. *Una sucesión (x_n) de números reales se llama una sucesión de Cauchy, si para cada número estrictamente positivo ϵ se puede hallar un número entero positivo $N(\epsilon)$ tal que $|x_n - x_m| \leqq \epsilon$, para toda pareja (n, m) de números enteros que cumplan las condiciones $n \geqq N(\epsilon)$ y $m \geqq N(\epsilon)$.*

Con esta terminología se puede decir que toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy. Es propiedad fundamental del conjunto de los números reales que la inversa de esta afirmación es cierta también:

Teorema 4.2. *Toda sucesión de Cauchy de números reales es convergente.*

Demostración. En primer lugar, una sucesión de Cauchy (x_n) es acotada. En efecto, tomemos el número ϵ de la definición 4.2 igual a uno, y sea N el entero correspondiente. Entonces tenemos $|x_N - x_n| \leqq 1$, es decir $x_N - 1 \leqq x_n \leqq x_N + 1$, para $n \geqq N$. Llamando b al mayor de los números $x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N + 1$ y a al menor de los números $x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N - 1$, se tiene $a \leqq x_n \leqq b$ para cada $n \in \mathbf{N}$.

Con más razón es acotada cada subsucesión de (x_n). Para cada $n \in \mathbf{N}$ sea $y_n = \inf\{x_m | m \geqq n\}$. La sucesión (y_n) es obviamente creciente. Además, (y_n) es acotada superiormente ya que cualquier cota superior de la sucesión (x_n) es también cota superior de (y_n). En virtud del teorema 4.1, la sucesión (y_n) converge hacia un número $c \in \mathbf{R}$. Dado $\epsilon > 0$, existe un número entero $N_1 \geqq 0$ tal que $|c - y_n| \leqq \frac{\epsilon}{3}$ para $n \geqq N_1$. Por otra parte, se puede hallar un número entero $N_2 \geqq 0$ tal que $|x_n - x_m| \leqq \frac{\epsilon}{3}$ para $n, m \geqq N_2$. Sea N el mayor de los dos números N_1 y N_2. En virtud de la definición de y_N, existe un elemento x_m, con $m \geqq N$, tal que $y_N \leqq x_m \leqq y_N + \frac{\epsilon}{3}$. Luego, para $n \geqq N$, se tiene

$$c - \epsilon \leqq y_N - \frac{2\epsilon}{3} \leqq x_m - \frac{2\epsilon}{3} \leqq x_n \leqq x_m + \frac{\epsilon}{3} \leqq y_N + \frac{2\epsilon}{3} \leqq c + \epsilon,$$

es decir $|c - x_n| \leqq \epsilon$, lo que demuestra que (x_n) tiende hacia c. ◊

Observación 4.1. En la definición del cuerpo de los números reales $\mathbf{R}$ la propiedad expresada en el teorema 4.2, junto con el axioma de Arquímedes (prop. 1.8), puede reemplazar el axioma (Co). Sea, en efecto, K un cuerpo totalmente ordenado, es decir, supóngase que se cumplen los axiomas (C1)-(C9), (T) y (CO1)-(CO2). Supóngase, además, que la prop. 1.8 y el teorema 4.2 son ciertos en K, y demostremos que entonces se cumple el enunciado del axioma (Co).

En primer lugar, se tiene $2^n \geqq n$ para todo $n \in \mathbf{N}$, y por lo tanto, cualquiera que sea el número $\epsilon > 0$, existe un $n \in \mathbf{N}$ tal que $2^n \geqq \frac{1}{\epsilon}$, es decir $\frac{1}{2^n} \leqq \epsilon$.

Sean ahora A un conjunto no vacío y acotado superiormente de números reales, x_0 un elemento de A e y_0 una cota superior de A. Definimos por inducción completa dos sucesiones (x_n) e (y_n) de números reales de la manera siguiente: supóngase que para cierta $n \in \mathbf{N}$ ya se han definido x_n e y_n; si $\frac{1}{2}(x_n + y_n)$ es cota superior de A, se pone $x_{n+1} = x_n$, $y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$, y si $\frac{1}{2}(x_n + y_n)$ no es cota superior de A, se pone $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$, $y_{n+1} = y_n$. Dado un número entero cualquiera $N \geqq 0$, para todo $n \geqq N$ los puntos x_n e y_n están contenidos en el intervalo $[x_N, y_N]$ cuya longitud es $y_N - x_N = \frac{1}{2^N}(y_0 - x_0)$. Por consiguiente, para $n \geqq N$ y $m \geqq N$ tenemos $|x_n - x_m| \leqq \frac{1}{2^N}(y_0 - x_0)$, $|y_n - y_m| \leqq \frac{1}{2^N}(y_0 - x_0)$ y $|x_n - y_m| \leqq \frac{1}{2^N}(y_0 - x_0)$. En virtud de la observación hecha al principio de la demostración, (x_n) e (y_n) son sucesiones de Cauchy que, en virtud de la hipótesis, tienen límites x e y, respectivamente. Pero $x = y$, ya que dado $\epsilon > 0$ existen x_n e y_m tales que $|x - x_n| \leqq \frac{\epsilon}{3}$, $|y - y_m| \leqq \frac{\epsilon}{3}$, $|x_n - y_m| \leqq \frac{\epsilon}{3}$ y, desde luego, $|x - y| \leqq \epsilon$, de donde resulta que $|x - y| = 0$, es decir $x = y$.

Partiendo de la prop. 1.6 (que es independiente del axioma (Co)), demostremos ahora que el número x así encontrado es extremo superior de A.

(i) $x \geqq a$ para todo $a \in A$. En efecto, supóngase que existe $a \in A$ tal que $a > x$, y sea $\epsilon = \frac{1}{2}(a - x) > 0$. Existe entonces un elemento y_n tal que $y_n \leqq x + \epsilon = \frac{1}{2}(x + a) < a$, lo que es imposible ya que cada y_n es cota superior de A.

(ii') Sea $z < x$ y pongamos $\epsilon = x - z$. Existe entonces un elemento x_n tal que $x_n \geqq x - \epsilon = z$. Puesto que ningún elemento x_n es cota superior de A, existe $a \in A$ tal que $a > x_n$, y con más razón $a > z$. ◇

Terminemos esta sección con un concepto de gran importancia en las aplicaciones de la topología al análisis.

Definición 4.3. *Sea* X *un subconjunto de* **R**. *Se dice que el subconjunto* Y *de* X *es denso en* X *si la adherencia* $(Y)_X^-$ *de* Y *relativa a* X *es igual a* X.

Proposición 4.3. *Sea* X *un subconjunto de* **R** *e* Y *un subconjunto de* X. *Las condiciones que siguen son equivalentes:*

(a) Y *es denso en* X.

(b) *Cualquiera que sea el punto* $x \in X$, *para cada vecindad* V *de* x *relativa a* X *se tiene* $V \cap Y \neq \emptyset$.

(c) *Para cada subconjunto no vacío* A *de* X, *y abierto relativo a* X, *se tiene* $A \cap Y \neq \emptyset$.

Demostración. La condición $(Y)_X^- = X$ significa que cada punto $x \in X$ es adherente a Y (def. 3.4), es decir, que cada vecindad $V \in \mathcal{V}_X(x)$ contiene por lo menos un punto de Y (def. 3.4). Esto demuestra la equivalencia de (a) y (b).

Supóngase ahora que se cumple (b), y sea $A \neq \emptyset$ un conjunto abierto relativo a X. Para cada $x \in A$, existe una $V \in \mathcal{V}_X(x)$ tal que $V \subset A$ (def. 3.2 y 3.3). Por hipótesis se tiene $V \cap Y \neq \emptyset$, y con más razón $A \cap Y \neq \emptyset$.

Finalmente, supóngase que se cumple (c). Sea x un punto de X y V una vecindad de x relativa a X. En virtud de la prop. 3.5, existe un conjunto A abierto relativo a X contenido en V y que contiene x. Por hipótesis, se tiene $A \cap Y \neq \emptyset$ y con más razón $V \cap Y \neq \emptyset$. ◇ 27

Proposición 4.4. *Sea* X *un subconjunto de* **R**. *Un subconjunto* Y *de* X *es denso en* X *si, y sólo si, la adherencia* $\bar{Y}$ *de* Y *en* **R** *contiene a* X.

Demostración. Si $(Y)_X^- = X$ y $x \in X$, entonces para cada $V \in \mathcal{V}_X(x)$ se tiene $V \cap Y \neq \emptyset$ (prop. 4.3). Sea U una vecindad de x en **R** tal que $x \in V \subset U$ (def. 3.1). Entonces con más razón $U \cap Y \neq \emptyset$, y por lo tanto $x \in \bar{Y}$. Puesto que x fue tomado como un punto arbitrario de X, se tiene $X \subset \bar{Y}$.

Inversamente, sea $X \subset \bar{Y}$, x un punto de X y V una vecindad de x relativa a X. Desde luego, por la def. 3.1 existe una vecindad U de x en **R** tal que $V = U \cap X$. Por hipótesis existe un punto $y \in Y$ tal que $y \in U$ (def. 2.8 y 2.9) y puesto que $Y \subset X$, se tiene $y \in Y \cap U \subset Y \cap X \cap U \subset Y \cap V$, es decir $Y \cap V$ no es vacío y por lo tanto Y es denso en X (prop. 4.3). ◇

Proposición 4.5. *Sea* X *un subconjunto de* **R**. *Un subconjunto* Y *de* X *es denso en* X *si, y sólo si, para cada* $x \in X$ *existe una sucesión* (y_n) *de puntos de* Y *que converge hacia* x.

Demostración. Si Y es denso en X, en virtud de la prop. 4.4 todo punto $x \in X$ es adherente a Y; luego, por la prop. 4.2, existe una sucesión (y_n) de puntos de Y que converge hacia x. Inversamente, si para cada $x \in X$ existe una sucesión de puntos de Y que converge hacia x, entonces por la prop. 4.2 se tiene $X \subset \bar{Y}$, y entonces Y es denso en X, en virtud de la prop. 4.4. ◇

Ejemplo 4.1. El conjunto $\mathbf{Q}$ de los números racionales es denso en el conjunto de números reales $\mathbf{R}$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, existe un número entero $n > 0$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ (prop. 1.8). Para cualquier $x \in \mathbf{R}$ existe un número $m \in \mathbf{Z}$ tal que $m - 1 < nx \leqq m$ y, por lo tanto, $\frac{m}{n} - \frac{1}{n} < x \leqq \frac{m}{n}$. De aquí resulta que $|x - \frac{m}{n}| < \frac{1}{n} < \varepsilon$, lo que implica la afirmación en virtud de la prop. 2.1 y de la prop. 4.3.

Ejercicios

1) Demuéstrese que toda sucesión convergente es acotada.

2) Demuéstrese que toda sucesión decreciente y acotada inferiormente es convergente.

3) Demuéstrese que una sucesión no puede converger hacia más de un punto. (Utilícese la prop. 4.1 y el ejercicio 2.2).

4) Sea (x_n) una sucesión que converge hacia x e (y_n) una sucesión que converge hacia y.

a) Demuéstrese que la sucesión $(x_n + y_n)$ converge hacia $x + y$.

b) Demuéstrese que la sucesión $(-x_n)$ converge hacia $-x$.

c) Demuéstrese que la sucesión $(x_n y_n)$ converge hacia xy.

d) Demuéstrese que si $x \neq 0$, entonces sólo pueden ser igual a cero un número finito de términos x_n, y que, poniendo $z_n = x_n^{-1}$, si $x_n = 0$ y dando un valor cualquiera a z_n si $x_n = 0$, la sucesión (z_n) converge hacia x^{-1}.

5) Sea (I_n) una sucesión de intervalos finitos tales que $I_n \supset I_{n+1}$ para todo $n \in \mathbf{N}$, y cuya longitud tiende a cero. Demuéstrese que existe un punto y sólo uno que pertenece a todos los I_n.

6) Dedúzcase la proposición 4.4 del ejercicio 3.4.

7) Demuéstrese que el conjunto $\mathbf{Q}_+$ de los números racionales positivos es denso en el conjunto $\mathbf{R}_+$ de los números reales positivos.

8) El punto $x \in \mathbf{R}$ se llama punto de acumulación (o valor de adherencia) de la sucesión (x_n) si para cada vecindad V de x y para cada número entero positivo n existe un número entero $m \geqq n$ tal

que $x_n \in V$. Demuéstrese que x es punto de acumulación de (x_n) si, y sólo si, existe una subsucesión de (x_n) que converge hacia x.

§ 5. Funciones Continuas

Como ya hemos dicho al principio de este capítulo, la topología es el estudio del concepto de la continuidad. Por lo tanto, la noción de función continua tiene un papel fundamental en este estudio. Entre las definiciones posibles se escoge aquélla que parece más sencilla y que más se presta a ser generalizada.

Definición 5.1. *Sea f una función definida en un subconjunto X de $\mathbf{R}$ y con valores en $\mathbf{R}$. Se dice que f es continua en el punto $x \in X$ si para cualquier vecindad W de $f(x)$, el conjunto $f^{-1}(W)$ es una vecindad de x relativa a X.*

Proposición 5.1. *Sea X un subconjunto de $\mathbf{R}$ y x un punto de X. Una función $f : X \to \mathbf{R}$ es continua en el punto x si, y sólo si, para cada vecindad W de $f(x)$ existe una vecindad V de x relativa a X tal que $f(V) \subset W$.*

Demostración. Si f es continua en x, entonces para cada vecindad W de $f(x)$ el conjunto $V = f^{-1}(W)$ es una vecindad de x relativa a X, y se tiene $f(V) \subset W$.

Inversamente, si W es una vecindad de $f(x)$ y V una vecindad de x relativa a X tal que $f(V) \subset W$, entonces $f^{-1}(W)$ contiene a V y, por la prop. 3.1 (i), es una vecindad de x relativa a X. ◇

Vamos a mostrar ahora que la anterior definición de función continua es equivalente a la que se suele dar en los textos de cálculo.

Proposición 5.2. *Sea X un subconjunto de $\mathbf{R}$ y x un punto de X. Una función $f : X \to \mathbf{R}$ es continua en el punto x si, y sólo si, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que de las condiciones $|x - y| < \delta$ e $y \in X$ se sigue $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.*

Demostración. Supóngase primero que f es continua en x y sea $\epsilon > 0$. El intervalo $]f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon[$ es una vecindad de $f(x)$, luego por la prop. 5.1 y la def. 3.1 existe una vecindad U de x en $\mathbf{R}$ tal que $y \in U \cap X$ implica $f(y) \in]f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon[$. En virtud de la prop. 2.1, existe $\delta > 0$ tal que la condición $|x - y| < \delta$ implica $y \in U$, y por lo tanto las condiciones $|x - y| < \delta$ e $y \in X$ implican $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Inversamente, supóngase que se cumple la condición de la proposición, y sea W una vecindad de $f(x)$. En virtud de la prop. 2.1, existe $\epsilon > 0$ tal que $|f(x) - z| < \epsilon$ implica $z \in W$. Por hipótesis, existe $\delta > 0$ tal que para todo $y \in X$ que verifica $|x - y| < \delta$ se tiene $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, es decir $f(y) \in W$. Luego $V =]x - \delta, x + \delta[\cap \cap X$ es una vecindad de x relativa a X tal que $f(V) \subset W$. De la prop. 5.1 resulta pues que f es continua en x. ◇

Proposición 5.3. *Sea* X *un subconjunto de* **R** *y* x *un punto de* X. *Una función* $f : X \to \mathbf{R}$ *es continua en el punto* x *si, y sólo si, para cada sucesión* (x_n) *de puntos* $x_n \in X$ *que converge hacia* x, *la sucesión* $(f(x_n))$ *converge hacia* $f(x)$.

Demostración. Supongamos que f es continua en x, y sea (x_n) una sucesión de puntos de X que converge hacia x. Dada una vecindad W de $f(x)$, existe una vecindad U de x en **R** tal que $f(U \cap X) \subset \subset W$ (prop. 5.1). En virtud de la prop. 4.1, existe un número entero positivo N tal que $x_n \in U$ para $n \geqq N$. Por consiguiente, $f(x_n) \in \in W$ para $n \geqq N$, es decir $(f(x_n))$ converge hacia $f(x)$.

Ahora supóngase que f no es continua en el punto x. Entonces existe una vecindad W de $f(x)$ tal que para ninguna vecindad V de x relativa a X se tiene $f(V) \subset W$. Para cada $n \in \mathbf{N}$ sea x_n un punto de X que pertenece al intervalo $[x - \frac{1}{n+1}, x + \frac{1}{n+1}]$ y tal que $f(x_n)$ no pertenece a W. Dado un número $\epsilon > 0$ existe un entero positivo $N(\epsilon)$ tal que $[N(\epsilon) + 1]^{-1} \leqq \epsilon$ (prop. 1.7) y, por lo tanto, $|x - x_n| \leqq \frac{1}{n+1} \leqq \frac{1}{N(\epsilon) + 1} \leqq \epsilon$ para $n \geqq N(\epsilon)$, es decir (x_n) tiende hacia x. Por otra parte, está claro que $(f(x_n))$ no tiende hacia $f(x)$. ◇

Observación 5.1. Obsérvese desde ahora que, en la demostración de las proposiciones 4.2 y 5.3 se hizo uso muy esencial de la existencia de una sucesión de vecindades particulares (U_n), a saber, los intervalos $[a - \frac{1}{n+1}, a + \frac{1}{n+1}]$, tales que cada vecindad del punto a contiene por lo menos una vecindad U_n. En el capítulo cuarto se darán ejemplos de espacios topológicos donde tal sucesión (U_n) no existe. Está claro que en estos espacios, el concepto de sucesiones convergentes será de poco valor. Esta es la razón porque se da a las sucesiones un papel secundario y se destaca más el uso de vecindades.

Proposición 5.4. *Sean* X *e* Y *dos subconjuntos de* **R**, *sea* f *una función definida en* X *con valores en* **R** *tal que* $f(X) \subset Y$, *y sea* g *una función definida en* Y *con valores en* **R**. *Si* f *es continua en* $x \in X$ *y* g *es continua en* $f(x) \in Y$, *entonces* $g \circ f$ *es continua en* x.

Demostración. Si W es una vecindad de $g(f(x))$, entonces $g^{-1}(W)$ es una vecindad de $f(x)$ relativa a Y, es decir, $g^{-1}(W) = V \cap Y$, donde V es una vecindad de $f(x)$ en $\mathbf{R}$ (def. 3.1). Ahora $f^{-1}(V)$ es una vecindad de x relativa a X, y por otra parte, $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W)) = f^{-1}(V \cap Y) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(Y) = f^{-1}(V) \cap X = f^{-1}(V)$. ◇

Definición 5.2. *Sea f una función definida en un subconjunto X de $\mathbf{R}$ y con valores en $\mathbf{R}$. Se dice que f es continua, o que f es continua sobre X, si es continua en cada punto de X.*

Proposición 5.5. *Sea f una función definida en un subconjunto X de $\mathbf{R}$, con valores en $\mathbf{R}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *f es continua.*

(b) *Para cada conjunto abierto A en $\mathbf{R}$ el conjunto $f^{-1}(A)$ es abierto relativo a X.*

(c) *Para cada conjunto cerrado F en $\mathbf{R}$ el conjunto $f^{-1}(F)$ es cerrado relativo a X.*

Demostración. Supóngase primero que f es continua. Sea A un conjunto abierto de $\mathbf{R}$ y sea x un punto de $f^{-1}(A)$. Existe una vecindad W de $f(x)$ contenida en A (def. 2.5 y 2.6) y, por hipótesis, $f^{-1}(W)$ es una vecindad de x relativa a X (def. 5.1.). Puesto que $f^{-1}(W) \subset f^{-1}(A)$ resulta que $f^{-1}(A)$ es abierto relativo a X (def. 3.2 y 3.3).

Inversamente, supóngase que se cumple la condición (b). Sea x un punto de X y W una vecindad de $f(x)$. En virtud de la prop. 2.5, existe un conjunto abierto A tal que $f(x) \in A \subset W$. Por hipótesis, el conjunto $f^{-1}(A)$ es abierto relativo a X y puesto que $x \in f^{-1}(A) \subset f^{-1}(W)$, de la prop. 3.5 resulta que $f^{-1}(W)$ es una vecindad de x relativa a X. Queda así demostrada la equivalencia de (a) y (b).

Ahora supóngase que se cumple (b), y sea F un conjunto cerrado en $\mathbf{R}$. Entonces $A = \complement F$ es un conjunto abierto en $\mathbf{R}$ (prop. 2.8), y por hipótesis, $f^{-1}(A)$ es un conjunto abierto relativo a X. Pero $\complement_X f^{-1}(F) = f^{-1}(\complement F) = f^{-1}(A)$, y en consecuencia el conjunto $f^{-1}(F)$ es cerrado relativo a X en virtud de la prop. 3.8.

Finalmente, supóngase que se cumple (c), y sea A un conjunto abierto de $\mathbf{R}$. Entonces $F = \complement A$ es un conjunto cerrado en $\mathbf{R}$ (prop. 2.8) y por hipótesis $f^{-1}(F)$ es un conjunto cerrado relativo a X. Puesto que $f^{-1}(A) = f^{-1}(\complement F) = \complement_X f^{-1}(F)$, en virtud de la prop. 3.8, el conjunto $f^{-1}(A)$ es abierto relativo a X. ◇

Corolario. *Sea f una función definida en un subconjunto X de $\mathbf{R}$, con valores en $\mathbf{R}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *f es continua.*

(b') *Para cada número real* a, *los conjuntos* $\{x \in X \mid f(x) < a\}$ *y* $\{x \in X \mid f(x) > a\}$ *son abiertos relativos a* X.

(c') *Para cada número real* a, *los conjuntos* $\{x \in X \mid f(x) \leqq a\}$ *y* $\{x \in X \mid f(x) \geqq a\}$ *son cerrados relativos a* X.

Demostración. En primer lugar, observemos que $\{x \in X \mid f(x) < a\} = f^{-1}(]\leftarrow, a[)$, $\{x \in X \mid f(x) > a\} = f^{-1}(]a, \rightarrow[)$, $\{x \in X \mid f(x) \leqq a\} = f^{-1}(]\leftarrow, a])$, $\{x \in X \mid f(x) \geqq a\} = f^{-1}([a, \rightarrow[)$. Puesto que los intervalos $]\leftarrow, a[$ y $]a, \rightarrow[$ son conjuntos abiertos y los intervalos $]\leftarrow, a]$ y $[a, \rightarrow[$ son conjuntos cerrados, de la prop. 5.5 resulta que la condición (a) implica cada una de las condiciones (b') y (c').

Demostremos ahora que la condición (b') implica la condición (a). Supóngase pues que se cumple (b'); sea x un punto de X y W una vecindad de $f(x)$. Entonces existe un intervalo abierto $]a, b[$ tal que $f(x) \in]a, b[\subset W$. Ahora $]a, b[=]\leftarrow, b[\cap]a, \rightarrow[$, y por hipótesis, el conjunto $f^{-1}(]a, b[) = f^{-1}(]\leftarrow, b[) \cap f^{-1}(]a, \rightarrow[)$ es abierto relativo a X (prop. 3.3 (ii)). Puesto que $x \in f^{-1}(]a, b[) \subset f^{-1}(W)$, de la prop. 3.5 resulta que $f^{-1}(W)$ es una vecindad de x relativa a X.

Finalmente, supóngase que se cumple la condición (c'), y demostremos que entonces se cumple (b'). Para $a \in \mathbf{R}$, se tiene $]\leftarrow, a[= \complement[a, \rightarrow[$ y por lo tanto $f^{-1}(]\leftarrow, a[) = \complement_X f^{-1}([a, \rightarrow[)$. Como por hipótesis $f^{-1}([a, \rightarrow[)$ es cerrado relativo a X, resulta de la prop. 3.8 que $f^{-1}(]\leftarrow, a[)$ es abierto relativo a X. De manera semejante, de $]a, \rightarrow[= \complement]\leftarrow, a]$ y del hecho de que $f^{-1}(]\leftarrow, a])$ es cerrado relativo a X, resulta que $f^{-1}(]a, \rightarrow[)$ es abierto relativo a X. ◇

Proposición 5.6. *Si la función* $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ *es continua, entonces la restricción* $f \mid T$ *de* f *a cualquier subconjunto* T *de* X *es también continua.*

Demostración. Sea A un conjunto abierto de **R**. Si f es continua, entonces en virtud de la prop. 5.5, el conjunto $f^{-1}(A)$ es abierto relativo a X, es decir, de la forma $B \cap X$, donde B es un conjunto abierto de **R** (prop. 3.2). Ahora bien, el conjunto $(f \mid T)^{-1}(A) = B \cap X \cap T = B \cap T$ es abierto relativo a T (prop. 3.2) y por lo tanto $f \mid T$ es continua (prop. 5.5). ◇

Demos ahora algunos ejemplos de funciones continuas.

Proposición 5.7. *Cada función constante* $f : x \mapsto c$ *es continua sobre* **R**.

Demostración. Sea A un conjunto abierto de **R**. Si $c \in A$, entonces $f^{-1}(A) = \mathbf{R}$; si $c \notin A$, entonces $f^{-1}(A) = \emptyset$. En ambos casos $f^{-1}(A)$ es abierto (prop. 2.3 (i)) y, por consiguiente, f es continua (prop. 5.5). ◇

Proposición 5.8. *Para cada $a \in \mathbf{R}$ la función $f: x \mapsto x + a$ es continua sobre* **R.**

Demostración. Sea W una vecindad del punto $f(x) = x + a$. Entonces W contiene un intervalo $]f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon[=]x + a - \epsilon, x + a + \epsilon[$, con $\epsilon > 0$ (prop. 2.1). Por consiguiente, $f^{-1}(W)$ contiene el intervalo $]x - \epsilon, x + \epsilon[$, es decir es una vecindad de x (prop. 2.1). ◇

Proposición 5.9. *La función $f: x \mapsto -x$ es continua sobre* **R.**

Demostración. Una vecindad W del punto $f(x) = -x$ contiene un intervalo $]-x - \epsilon, -x + \epsilon[$ con $\epsilon > 0$ (prop. 2.1). Por consiguiente, $f^{-1}(W)$ contiene el intervalo $]x - \epsilon, x + \epsilon[$, es decir, es una vecindad de x (prop. 2.1). ◇

Proposición 5.10. *Para cada $a \in \mathbf{R}$ la función $f: x \mapsto ax$ es continua sobre* **R.**

Demostración. Si $a = 0$, entonces f es la función constante $x \mapsto 0$ que es continua en virtud de la prop. 5.7. Supóngase ahora que $a > 0$. Si W es una vecindad del punto $f(x) = ax$ entonces contiene un intervalo $]ax - \epsilon, ax + \epsilon[$ donde $\epsilon > 0$ (prop. 2.1). Por consiguiente, $f^{-1}(W)$ contiene el intervalo $]x - \frac{\epsilon}{a}, x + \frac{\epsilon}{a}[$, es decir, es una vecindad de x (prop. 2.1).

Finalmente, si $a < 0$, entonces la función $x \mapsto ax$ es la composición de las funciones $x \mapsto |a|x$ y $x \mapsto -x$. La primera es continua en virtud de la primera parte de esta demostración, la segunda lo es por la prop. 5.9. Luego, en virtud de la prop. 5.4, la función $x \mapsto ax$ es continua. ◇

Ejercicios

1) Demuéstrese que una función $f: X \to \mathbf{R}$ es continua si, y sólo si, para cada subconjunto M de X se verifica $f((M)^{-}_{X}) \subset \overline{f(M)}$.

2) Sea f una función definida en $X \subset \mathbf{R}$ con valores en $\mathbf{R}$, y sea Y un subconjunto de X. Demuéstrese que si f es continua en un punto $x \in Y$, entonces la restricción $f|Y$ de f a Y es continua en x.

3) Demuéstrese que la función $x \mapsto \frac{1}{x}$ es continua sobre $\complement\{0\}$.

4) Demuéstrese que para $n \in \mathbf{N}$ la función $x \mapsto x^n$ es continua sobre **R.**

5) Demuéstrese que la función $x \mapsto \sqrt{x}$ es continua sobre $\mathbf{R}_+$.

§ 6. Conjuntos Compactos

Si X es un conjunto arbitrario e Y es un subconjunto de X, una familia $(A_\iota)_{\iota \in I}$ de subconjuntos de X se llama un recubrimiento de Y si $Y \subset \bigcup_{\iota \in I} A_\iota$. En este caso se dice también que los conjuntos A_ι cubren Y.

Definición 6.1. *Un subconjunto* K *de la recta real* $\mathbf{R}$ *es compacto si para cada recubrimiento* $(A_\iota)_{\iota \in I}$ *de* K *con conjuntos abiertos* A_ι *existe una familia finita* $A_{\iota_1}, \ldots, A_{\iota_m}$ *que cubre* K.

En virtud de la prop. 3.2, da lo mismo decir que K es compacto si para cada recubrimiento $(A_\iota)_{\iota \in I}$ de K con conjuntos $A_\iota \subset K$ abiertos relativos a K, existe una subfamilia finita $(A_{\iota_k})_{1 \leq k \leq m}$ que cubre K.

Proposición 6.1. *Un subconjunto* K *de* $\mathbf{R}$ *es compacto si, y sólo si, para cada familia* $(F_\iota)_{\iota \in I}$ *de conjuntos cerrados* F_ι *tal que* $(\bigcap_{\iota \in I} F_\iota) \cap K = \emptyset$, *existe una subfamilia finita* $F_{\iota_1}, \ldots, F_{\iota_m}$ *tal que* $(\bigcap_{k=1}^{m} F_{\iota_k}) \cap K = \emptyset$.

34

Demostración. El conjunto $A_\iota = \complement F_\iota$ es abierto si, y sólo si, F_ι es cerrado (prop. 2.8). Además, la condición $(\bigcap_{\iota \in I} F_\iota) \cap K = \emptyset$ significa que $\bigcup_{\iota \in I} A_\iota \supset K$, y similarmente, la condición $(\bigcap_{k=1}^{m} F_{\iota_k}) \cap K = \emptyset$ significa que $\bigcup_{k=1}^{m} A_{\iota_k} \supset K$. ◇

En virtud de la prop. 3.7, se puede decir que K es compacto si, y sólo si, para cada familia $(F_\iota)_{\iota \in I}$ de conjuntos $F_\iota \subset K$ cerrados relativos a K tal que $\bigcap_{\iota \in I} F_\iota = \emptyset$, existe una subfamilia finita $F_{\iota_1}, \ldots, F_{\iota_m}$ tal que $\bigcap_{k=1}^{m} F_{\iota_k} = \emptyset$.

Utilizando la propiedad de los números reales mencionada en la observación 5.1 se puede dar una forma un poco más sencilla a las características hasta ahora descritas de los conjuntos compactos.

Proposición 6.2. *Sea* K *un subconjunto de* $\mathbf{R}$. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) K *es compacto.*

(b) *Para cualquier sucesión* $(A_n)_{n\in N}$ *de subconjuntos de* K, *abiertos relativos a* K, *que verifican* $A_n \subset A_{n+1}$ *para* $n \in \mathbf{N}$, *y* $\bigcup_{n\in N} A_n = K$, *existe un índice* $s \in \mathbf{N}$ *tal que* $A_s = K$.

(c) *Para cualquier sucesión* $(F_n)_{n\in N}$ *de subconjuntos de* K, *cerrados relativos a* K, *que verifican* $F_n \supset F_{n+1}$ *para* $n \in \mathbf{N}$, y $\bigcap_{n\in N} F_n = \emptyset$, *existe un índice* $s \in \mathbf{N}$ *tal que* $F_s = \emptyset$.

Demostración. En primer lugar, la condición (a) implica las condiciones (b) y (c). En efecto, si K es compacto, entonces existe una subfamilia finita $A_{n_1}, \ldots, A_{n_m}$ de (A_n) tal que $\bigcup_{k=1}^{m} A_{n_k} = K$, y respectivamente una subfamilia finita $F_{n_1}, \ldots, F_{n_m}$ de (F_n) tal que $\bigcap_{k=1}^{m} F_{n_k} = \emptyset$. Tomando para s el mayor de los enteros $n_1, \ldots, n_m$, se tiene $A_s \supset A_{n_k}$ y $F_s \subset F_{n_k}$ para $1 \leqq k \leqq m$, es decir, $A_s = \bigcup_{k=1}^{m} A_{n_k}$ y $F_s = \bigcap_{k=1}^{m} F_{n_k}$.

Por otra parte, se ve, como en la demostración de la prop. 6.1, que las condiciones (b) y (c) son equivalentes. En efecto, poniendo $F_n = \complement_X A_n$, las condiciones $A_n \subset A_{n+1}$, $\bigcup_{n\in N} A_n = K$ equivalen respectivamente a $F_n \supset F_{n+1}$, $\bigcap_{n\in N} F_n = \emptyset$, el conjunto F_n es cerrado relativo a K si, y sólo si, A_n es abierto relativo a K (prop. 3.8) y finalmente, decir que $A_s = K$ es lo mismo que decir $F_s = \emptyset$.

Falta entonces demostrar que (b) implica (a). Supóngase que (b) sea cierto, y sea $(A_\iota)_{\iota\in I}$ un recubrimiento de K por conjuntos $A_\iota \subset K$ abiertos relativos a K. Sea ι un índice fijo y x un punto de A_ι. Puesto que A_ι es abierto relativo a K, existe un intervalo $]x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k}[$ tal que $]x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k}[\cap K \subset A_\iota$ donde k es un número entero $\geqq 1$ (observación 5.1). En virtud del ejemplo 4.1 existe un número racional r tal que $|x - r| < \frac{1}{2k}$, y por consiguiente, $x \in]r - \frac{1}{2k}, r + \frac{1}{2k}[\cap K \subset A_\iota$.

Ahora bien los conjuntos $]r - \frac{1}{2k}, r + \frac{1}{2k}[\cap K$, donde $r \in \mathbf{Q}$ y $k \in \mathbf{N}$, $k \geqq 1$, que están contenidos en algún conjunto A_ι forman una colección enumerable, ya que $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{N}$ son conjuntos enumerables. Desde luego, es posible ordenarlos en una sucesión que llamaremos (B_n). Los conjuntos B_n son abiertos relativos a K (prop. 3.2). Por hipótesis, cada punto $x \in K$ está contenido en algún conjunto A_ι, y acabamos de ver que cada punto de A_ι está contenido en algún B_n; por lo tanto (B_n) es un recubrimiento de K. Si para cada $n \in \mathbf{N}$ escribimos $C_n = \bigcup_{k=0}^{n} B_k$, entonces (C_n) es un recubrimiento de K, los conjuntos C_n son abiertos relativos a K (prop. 3.3 (iii)) y se cumple $C_n \subset C_{n+1}$ para $n \in \mathbf{N}$. Por hipótesis, existe un índice $s \in \mathbf{N}$ tal que $C_s = K$, es decir, $\bigcup_{k=0}^{s} B_k = K$. Si a cada índice k con $0 \leqq k \leqq s$ se hace corresponder un conjunto A_{ι_k} que contiene B_k, entonces la familia $(A_{\iota_k})_{0 \leqq k \leqq s}$ cubre K, lo que demuestra que K es compacto. ◇

Proposición 6.3. *Un subconjunto* K *de* $\mathbf{R}$ *es compacto si, y sólo si, para cada sucesión* (x_n) *de puntos* $x_n \in K$ *existe una subsucesión* (x_{n_k}) *que converge hacia un punto de* K.

Demostración. Obsérvese en primer lugar que (x_n) tiene una subsucesión que converge hacia el punto $x \in K$ si, y sólo si, para cada vecindad V de x relativo a K existe un número infinito de índices $n \in \mathbf{N}$ tales que $x_n \in V$ (cf. las proposiciones 4.1 y 4.2, y el ejercicio 8 del § 4). Supongamos pues que K sea compacto y que para cada $x \in K$ existe una vecindad V_x relativa a K que sólo contiene un número finito de términos de la sucesión (x_n). En virtud de la prop. 3.5 se puede suponer además que los conjuntos V_x son abiertos relativos a K, y en virtud de la prop. 3.1 (iii), se tiene $\bigcup_{x \in K} V_x = K$. Por hipótesis, existe un número finito de puntos $x_1, \ldots, x_m$ tales que $V_{x_1} \cup \ldots \cup V_{x_m} = K$. Por consiguiente K no contiene sino un número finito de términos de (x_n), lo que es absurdo.

36

Supongamos, inversamente, que se cumple la condición de la proposición, y sea (F_n) una sucesión de subconjuntos no vacíos de K, cerrados relativos a K, tales que $F_n \supset F_{n+1}$ para $n \in \mathbf{N}$. En virtud de la prop. 6.2 (c), basta demostrar que $\bigcap_{n \in N} F_n \neq \emptyset$. Para cada $n \in \mathbf{N}$ sea x_n un punto de F_n. Por hipótesis, la sucesión (x_n) tiene una subsucesión (x_{n_k}) que converge hacia un punto $x \in K$. Puesto que $x_{n_k} \in F_n$ para $n_k \geqq n$, el punto x es adherente a F_n relativo a K (prop. 4.2), y por lo tanto, $x \in F_n$, ya que F_n es cerrado relativo a K. De esta manera resulta que $x \in \bigcap_{n \in N} F_n$. ◇

Los conjuntos compactos de la recta real se pueden describir en forma muy sencilla.

Proposición 6.4. *Un subconjunto* K *de* $\mathbf{R}$ *es compacto si, y sólo si, es acotado y cerrado.*

Demostración. Sea K un subconjunto acotado y cerrado de $\mathbf{R}$, y (x_n) una sucesión de puntos de K. Sea a_0 una cota inferior y b_0 una cota superior de K, y tomemos $x_{n_0} = x_0$. Se puede definir por inducción completa una sucesión creciente (a_k) y una sucesión decreciente (b_k) tales que $b_k - a_k = \frac{1}{2^k}(b_0 - a_0)$, y una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) tal que $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$ para todo $k \in \mathbf{N}$. En efecto supongamos que ya se definieron a_k y b_k tales que $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$, y que un número infinito de términos de x_n está contenido en el intervalo $[a_k, b_k]$. Entonces en uno de los intervalos $[a_k, \frac{1}{2}(a_k + b_k)]$ y $[\frac{1}{2}(a_k + b_k), b_k]$ debe haber un número infinito de términos de (x_n). Llamemos $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ al intervalo que tiene esta propiedad y escojamos para $x_{n_{k+1}}$ un elemento x_n contenido en este intervalo y tal que verifica $n > n_k$.

Puesto que $x_{n_j} \in [a_k, b_k]$ para $j \geqq k$, se tiene $|x_{n_j} - x_{n_m}| \leqq \frac{1}{2^k}(b_0 - a_0)$ para $j, m \geqq k$, es decir (x_{n_k}) es una sucesión de Cauchy. En virtud del teorema 4.2, la sucesión (x_{n_k}) converge hacia un punto x, y en virtud de la prop. 4.2 y del hecho de ser K cerrado se sigue que $x \in$ K. Resulta pues de la prop. 6.3 que K es compacto.

Inversamente, supóngase que K es compacto. Sea x un punto adherente a K. En virtud de la prop. 4.2, existe una sucesión de puntos $x_n \in$ K que converge hacia x. Por otra parte existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) que converge hacia un punto de K (prop. 6.3). Ahora es evidente que cada subsucesión de una sucesión convergente converge hacia el mismo límite. Luego, $x \in$ K y K es cerrado (def. 2.9).

Finalmente, los intervalos abiertos $]n - 2, n + 2[$, donde $n \in \mathbf{Z}$ cubren el conjunto K. Por hipótesis existe entonces un número finito entre ellos; sea $]n_k - 2, n_k + 2[$, donde $k = 1, \ldots, m$, que ya cubren K. Si a es el menor y b el mayor de los números $n_1, \ldots n_m$, entonces K estará contenido en el intervalo $]a - 2, b + 2[$. ◇

El hecho de satisfacer cada conjunto cerrado y acotado de la recta real a la condición de la prop. 6.3 es muy clásico y se llama a veces teorema de Bolzano-Weierstrass. El hecho de implicar la condición de la prop. 6.3 a la condición de la def. 6.1 se llama teorema de Borel-Lebesgue por algunos autores y teorema de Heine-Borel por otros. Finalmente, la prop. 6.1 se suele llamar teorema de intersección de Cantor.

Ejemplo 6.1. Todo intervalo cerrado y finito es un conjunto compacto.

Proposición 6.5. *Sea f una función continua, definida en un subconjunto compacto* K *de* $\mathbf{R}$, *y con valores en* $\mathbf{R}$. *Entonces el conjunto* f(K) *es compacto.*

Demostración. Sea (A_t) un recubrimiento de $f(K)$ donde los A_t son conjuntos abiertos. En virtud de la prop. 5.5, los conjuntos $f^{-1}(A_t)$ son abiertos relativos a K, y es evidente que cubren a K. Por hipótesis, hay un número finito entre ellos que cubren K, sean esos $f^{-1}(A_{t_1}), \ldots, f^{-1}(A_{t_n})$; pero entonces los conjuntos $A_{t_1}, \ldots, A_{t_n}$ cubren $f(K)$. ◇

De aquí resultan dos teoremas clásicos sobre funciones continuas.

Teorema 6.1. *Toda función continua, definida sobre un conjunto compacto* K *y con valores en* **R** *es acotada.*

Demostración. $f(K)$ es compacto en virtud de la prop. 6.5, y desde luego, acotado en virtud de la prop. 6.4. ◇

Teorema 6.2. *Sea f una función continua, definida en un conjunto compacto* K *y con valores en* **R**. *Entonces existe un punto* $\xi \in K$ *tal que* $f(\xi) \geqq f(x)$ *para todo* $x \in K$, *y un punto* $\eta \in K$ *tal que* $f(\eta) \leqq f(x)$ *para todo* $x \in K$.

Demostración. En virtud de las proposiciones 6.4 y 6.5, el conjunto $f(K)$ es acotado y cerrado. Por consiguiente, el extremo superior M de $f(K)$, que existe en virtud del axioma (Co), y que es adherente a $f(K)$ en virtud de la prop. 1.6 (ii'), pertenece a $f(K)$. Tomando $\xi \in K$ tal que $f(\xi) = M$, obtenemos el punto ξ buscado.

De las proposiciones 5.4 y 5.9 resulta que la función $x \mapsto -f(x)$ es continua; luego de la primera parte de la demostración se sigue que existe $\eta \in K$ tal que $-f(\eta) \geqq -f(x)$, es decir $f(\eta) \leqq f(x)$ para todo $x \in K$. ◇

Los valores $f(\xi)$ y $f(\eta)$ se llaman respectivamente el máximo y el mínimo de la función f. De la demostración anterior resulta que $f(\xi)$ es el extremo superior y $f(\eta)$ es el extremo inferior de $f(K)$. Por lo tanto el teorema 6.2 se enuncia a veces diciendo que una función continua definida sobre un conjunto compacto alcanza sus extremos.

Terminemos esta sección con el tercer teorema clásico sobre el comportamiento de las funciones continuas definidas en conjuntos compactos.

Definición 6.2. *Una función f definida en un subconjunto* X *de* **R** *y con valores en* **R** *es uniformemente continua si para cada número* $\varepsilon > 0$ *existe un número* $\delta > 0$ *tal que las condiciones* $x \in X$, $y \in X$ *y* $|x - y| \leqq \delta$ *implican* $|f(x) - f(y)| \leqq \varepsilon$.

De la prop. 5.2 se sigue que una función uniformemente continua es continua (def. 5.2).

Teorema 6.3. *Toda función continua definida sobre un conjunto compacto y con valores en* $\mathbf{R}$ *es uniformemente continua.*

Demostración. Sea $K \subset \mathbf{R}$ un conjunto compacto y $f : K \to \mathbf{R}$ una función continua. Dado $\epsilon > 0$, para cada $x \in K$ existe $\delta_x > 0$ tal que $y \in]x - 2\delta_x, x + 2\delta_x[\cap K$ implica $|f(x) - f(y)| \leqq \frac{1}{2}\epsilon$ (prop. 5.2). Los intervalos abiertos $]x - \delta_x, x + \delta_x[$ cubren K y, por consiguiente, existe un número finito de puntos $x_1, \ldots, x_m$ tales que los intervalos $]x_k - \delta_{x_k}, x_k + \delta_{x_k}[$ con $1 \leqq k \leqq m$ cubren K. Sea $\delta > 0$ el menor de los números δ_{x_k} con $1 \leqq k \leqq m$.

Sean x e y dos puntos de K tales que $|x - y| \leqq \delta$. Existe un punto x_k tal que $x \in]x_k - \delta_{x_k}, x_k + \delta_{x_k}[$, es decir $|x - x_k| < \delta_{x_k}$ y por lo tanto $|y - x_k| < \delta + \delta_{x_k} \leqq 2\delta_{x_k}$, es decir $y \in]x_k - 2\delta_{x_k}, x_k + 2\delta_{x_k}[$. Por consiguiente, tenemos $|f(x) - f(x_k)| \leqq \frac{1}{2}\epsilon$, $|f(y) - f(x_k)| \leqq \frac{1}{2}\epsilon$ de donde resulta que $|f(x) - f(y)| \leqq \epsilon$. ◇

Ejercicios

1) Dedúzcase los teoremas 6.1 y 6.2 de la propiedad de los conjuntos compactos expresada en la parte (c) de la prop. 6.2.

2) Sea X un subconjunto de $\mathbf{R}$ y $(A_\iota)_{\iota \in I}$ un recubrimiento de X con conjuntos abiertos A_ι. Demuéstrese que existe una subfamilia enumerable $(A_{\iota_k})_{k \in \mathbf{N}}$ que cubre X ("axioma de Lindelöf").

3) Dése un ejemplo de función continua definida en el intervalo abierto $]0, 1[$ que no sea uniformemente continua.

§ 7. Conjuntos Conexos

Definición 7.1. *Un subconjunto* X *de la recta real* $\mathbf{R}$ *se llama conexo si siempre que* A *y* B *sean dos subconjuntos de* X*, abiertos relativos a* X*, tales que* $A \cup B = X$ *y* $A \cap B = \emptyset$*, entonces uno de dichos conjuntos,* A *o* B*, tiene que ser vacío.*

Proposición 7.1. *Sea* X *un subconjunto de* $\mathbf{R}$. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) X *es conexo.*

b) *Siempre que* F *y* G *sean dos subconjuntos de* X*, cerrados relativos a* X*, tales que* $F \cup G = X$ *y* $F \cap G = \emptyset$*, entonces uno de dichos conjuntos,* F *o* G*, es vacío.*

(c) *Los únicos subconjuntos de* X *que son al mismo tiempo abiertos y cerrados relativos a* X *son* $\emptyset$ *y* X.

Demostración. La equivalencia de (a) y (b) resulta de que si se pone $F = \complement_X A$, $G = \complement_X B$, entonces F y G son cerrados relativos a X si, y sólo si, A y B son abiertos relativos a X (prop. 3.8). Además, las relaciones $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$ equivalen, respectivamente, a $F \cap G = \emptyset$ y $F \cup G = X$. Por fin $F = \emptyset$ si, y sólo si, $A = X$, es decir, $B = \emptyset$.

Sea ahora X conexo y A un subconjunto de X que es abierto y cerrado relativo a X. Entonces $B = \complement_X A$ es cerrado relativo a X (prop. 3.8), $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$. Por consiguiente, o bien $A = \emptyset$, o bien $B = \emptyset$, es decir $A = X$.

Inversamente, supóngase que se cumple la condición (c), y sean A y B dos subconjuntos de X, abiertos relativos a X, tales que $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$. Entonces $B = \complement_X A$, y por lo tanto A es también cerrado relativo a X (prop. 3.8). Por hipótesis se tiene, o bien $A = \emptyset$, o bien $A = X$, es decir $B = \emptyset$. ◇

40 **Proposición 7.2.** *La reunión de una familia* $(X_\iota)_{\iota \in I}$ *de subconjuntos conexos de* **R** *que tienen un punto* x *en común es conexa.*

Demostración. Pongamos $X = \bigcup_{\iota \in I} X_\iota$ y sean A y B dos subconjuntos de X, abiertos relativos a X, tales que $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$. Supóngase que x está contenido, por ejemplo, en A. Para todo $\iota \in I$ los conjuntos $A_\iota = A \cap X_\iota$ y $B_\iota = B \cap X_\iota$ son abiertos relativos a X_ι (prop. 3.2), y tales que $A_\iota \cup B_\iota = X_\iota$ y $A_\iota \cap B_\iota = \emptyset$. Puesto que $x \in A_\iota$, se tiene necesariamente $B_\iota = \emptyset$. Por lo tanto $B = \emptyset$ y X es conexo. ◇

Dado un subconjunto X de **R** y un punto x de X, la colección de todos los subconjuntos conexos de X que contienen x no es vacía ya que contiene el conjunto $\{x\}$. Además, la reunión de todos los subconjuntos conexos de X que contienen x es también un conjunto conexo en virtud de la prop. 7.2, y claramente es el mayor subconjunto conexo de X que contiene a x. Esto justifica la definición siguiente:

Definición 7.2. *Sea* x *un punto del subconjunto* X *de* **R**. *El componente conexo de* x *en* X *es el mayor subconjunto conexo de* X *que contiene a* x. *Se llaman componentes conexos de* X *los componentes conexos de los puntos de* X *en* X.

Resulta también de la prop. 7.2 que si x e y son dos puntos de X, entonces los componentes conexos de x e y en X, o bien coinciden, o bien son disjuntos. De esta manera, cada conjunto $X \subset \subset \mathbf{R}$ es la unión de una familia de conjuntos conexos disjuntos dos a dos, a saber, los componentes conexos de X.

Se verá ahora que los conjuntos conexos de la recta real se caracterizan de manera tan sencilla que no valdría la pena de introducir el concepto de conexión si no tuviéramos en mente generalizaciones ulteriores.

Teorema 7.1. *Un subconjunto no vacío de la recta real es conexo si, y sólo si, es un intervalo.*

Empecemos con algunos resultados auxiliares que se necesitan en la demostración.

Lema 7.1. *Un subconjunto no vacío* I *de* $\mathbf{R}$ *es un intervalo si, y sólo si, para cada pareja de puntos* $x \in I$, $y \in I$ *tal que* $x < y$ *se tiene* $z \in I$ *para todo* $z \in \mathbf{R}$ *que verifica* $x \leqq z \leqq y$.

Demostración. Es casi evidente que la condición es necesaria. En efecto, si, por ejemplo, I es el intervalo $]a, b]$ (def. 2.3), y si $x, y \in I$, entonces $a < x \leqq b$, $a < y \leqq b$; por tanto para cada z tal que $x \leqq z \leqq y$ se tiene $a < z \leqq b$, es decir $z \in I$. La demostración es análoga en los otros casos.

Supóngase ahora cumplida la condición del lema y considérese primero el caso en que I es acotado. Si a es el extremo inferior y b el extremo superior de I, para cada $z \in]a, b[$ se tienen elementos $x \in I$ e $y \in I$ tales que $x < z < y$ (prop. 1.6 (ii')) y, por lo tanto, $z \in I$. Por consiguiente $]a, b[\subset I \subset [a, b]$, y desde luego I es uno de los cuatro intervalos $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$ ó $[a, b]$.

Si I no es acotado ni inferior ni superiormente, entonces para cada $z \in \mathbf{R}$ existen $x \in I$, $y \in I$ tales que $x < z < y$, es decir, $I = =]\leftarrow, \rightarrow[$.

Si I es acotado inferiormente pero no lo es superiormente, sea a el extremo inferior de I. Para cada $z \in]a, \rightarrow[$ existen puntos $x \in I$, $y \in I$ tales que $x < z < y$ (prop. 1.6 (ii')), es decir, I es uno de los intervalos $[a, \rightarrow[$ ó $]a, \rightarrow[$.

Finalmente, si I es acotado superiormente pero no lo es inferiormente, se prueba de la misma manera que debe ser un intervalo de la forma $]\leftarrow, b]$ ó $]\leftarrow, b[$. ◇

Si M y N son dos subconjuntos de $\mathbf{R}$, se denota por $M + N$ el conjunto de todos los puntos $x + y$, donde $x \in M$ e $y \in N$. En particular, si W es el intervalo $]-\epsilon, \epsilon[$, entonces $M + W$ es el conjunto de todos los puntos $x \in \mathbf{R}$ para los cuales existe un punto $m \in M$ tal que $|x - m| < \epsilon$. En efecto, $x = m + w$ con algún $m \in M$ y $w \in W$ es equivalente a $x - m \in W$, es decir, a $|x - m| < \epsilon$.

Lema 7.2. *Sean* K *un subconjunto compacto y* F *un subconjunto cerrado de* $\mathbf{R}$, *tales que* $K \cap F = \emptyset$. *Entonces existe un número* $\epsilon > 0$ *tal que* $(K +]-\epsilon, \epsilon[) \cap F = \emptyset$.

Demostración. Puesto que $\complement F$ es abierto (prop. 2.8) y $K \subset \complement F$, para cada punto $x \in K$ existe un número $\epsilon_x > 0$ tal que $]x - \epsilon_x, x + \epsilon_x[\cap F = \emptyset$. Como K es compacto (def. 6.1), existe un número finito de puntos $x_1, \ldots, x_m$ de K tales que los intervalos $]x_k - \frac{1}{2}\epsilon_{x_k}, x_k + \frac{1}{2}\epsilon_{x_k}[$ con $1 \leqq k \leqq m$ cubren K. Sea ϵ el menor de los números $\frac{1}{2}\epsilon_k = \frac{1}{2}\epsilon_{x_k} (1 \leqq k \leqq m)$. Si $x \in K +]-\epsilon, \epsilon[$, entonces existe $y \in K$ tal que $|x - y| < \epsilon$, y también un x_k tal que $|y - x_k| < \frac{1}{2}\epsilon_k$. Por consiguiente, $|x - x_k| < \epsilon + \frac{1}{2}\epsilon_k \leqq \epsilon_k$, es decir, $x \in]x_k - \epsilon_k, x_k + \epsilon_k[$ lo que demuestra que x no pertenece a F. ◇

Sea ϵ un número estrictamente positivo. Una sucesión finita $(x_k)_{0 \leqq k \leqq j}$ de puntos de $\mathbf{R}$ se llama una ϵ-cadena si $|x_{k+1} - x_k| \leqq \epsilon$ para $0 \leqq k < j$. Los puntos x_0 y x_j se llaman los extremos de la ϵ-cadena y se dice que los extremos se unen mediante la ϵ-cadena.

Lema 7.3. *Sea* I *un intervalo de* $\mathbf{R}$ *y* ϵ *un número estrictamente positivo. Cada dos puntos* x, y *de* I *se pueden unir mediante una* ϵ*-cadena de puntos de* I.

Demostración. Supongamos, por ejemplo, que $x < y$, y sea n un número entero positivo tal que $\frac{1}{n} \leqq \epsilon$. Sea además p el número entero mayor tal que $p \leqq nx$ y q el número entero mayor tal que $q \leqq ny$. Se tiene $p \leqq q$. Si $p = q$, resulta que $y - x \leqq \frac{1}{n}$ y los dos puntos x, y ya se pueden considerar como una ϵ-cadena. Si $p < q$ póngase $x_k = \frac{p+k}{n}$ para $1 \leqq k \leqq q - p$. Entonces $0 < x_1 - x \leqq \frac{1}{n}$, $x_{k+1} - x_k = \frac{1}{n}$ para $1 \leqq k \leqq q - p - 1$, $0 \leqq y - x_{q-p} \leqq \frac{1}{n}$, es decir, los puntos $x, x_1, \ldots, x_{q-p}, y$ forman una ϵ-cadena que une los puntos x e y. En virtud del lema 7.1, los puntos $x_1, \ldots, x_{q-p}$ pertenecen a I. ◇

Demostración del Teorema 7.1. Un conjunto que consta de un solo punto es un intervalo (def. 2.2). Supongamos pues que el conjunto X contiene por lo menos dos puntos. Si X no es un intervalo, en virtud del lema 7.1, existen tres puntos x, y, z de $\mathbf{R}$ tales que $x < z < y$, $x \in X$, $y \in X$, pero $z \notin X$. Los intervalos $]\leftarrow, z[$ y $]z, \rightarrow[$ son dos conjuntos abiertos cuya reunión cubre X. En virtud de la prop. 3.2, las trazas de los intervalos $]-, z[$ y $]z, \to[$ sobre X son dos subconjuntos disjuntos no vacíos de X, abiertos relativos a X, cuya reunión es X. Desde luego X no es conexo. Queda demostrado por lo tanto que cada conjunto conexo no vacío es un intervalo.

Inversamente, sean primero I un intervalo finito cerrado y F y G dos subconjuntos no vacíos de I, cerrados relativos a I, tales que $F \cap G = \emptyset$. Hay que probar que $F \cup G$ no puede ser igual a I (prop. 7.1). En virtud del corolario de la prop. 3.7, los conjuntos F y G son cerrados. Además F es acotado y por lo tanto compacto (prop. 6.4). Del lema 7.2 se sigue que existe un número $\epsilon > 0$ tal que los conjuntos $F +]-\epsilon, \epsilon[$ y G son disjuntos. Sea x un punto de F e y un punto de G. En virtud del lema 7.3, los puntos x e y se pueden unir mediante una $\frac{1}{2}\epsilon$-cadena $(x_k)_{0 \leq k \leq j}$ de puntos de I. Sea $i(0 \leq i \leq j - 1)$ el índice para el cual se verifica $x_i \in F$, pero $x_k \notin F$ para $k > i$. El punto $x_{i+1} \in I$ no puede estar tampoco en G, ya que de $|x_{i+1} - x_i| < \epsilon$ resulta $x_{i+1} \in F +]-\epsilon, \epsilon[$.

Finalmente, sea I un intervalo arbitrario y c un punto de I. En virtud del lema 7.1, el intervalo I es la reunión de los intervalos finitos y cerrados $[a, b]$ donde $a \in I$, $b \in I$ y $a \leq c \leq b$. De la prop. 7.2 y de lo que se acaba de ver se sigue que I es conexo. ◊

Proposición 7.3. *Cada componente conexo* (def. 7.2) *de un subconjunto abierto de* **R** *es un conjunto abierto.*

Demostración. Sea A un subconjunto abierto de **R**, B un componente conexo de A y x un punto de B. Puesto que A es abierto, existe un intervalo $]x - \epsilon, x + \epsilon[$ contenido en A. Pero en virtud del teorema 7.1, el intervalo $]x - \epsilon, x + \epsilon[$ es conexo; luego, por la definición de un componente conexo, $]x - \epsilon, x + \epsilon[$ está contenido en B, lo que muestra que B es abierto (prop. 2.1). ◊

De aquí resulta otra propiedad clásica de la recta real:

Teorema 7.2. *Cada subconjunto abierto de la recta real es la reunión de una colección enumerable de intervalos abiertos disjuntos.*

Demostración. Un conjunto abierto es la unión de sus componentes conexos, disjuntos dos a dos que, por el teorema 7.1, son intervalos y por la prop. 7.3 son abiertos. Puesto que todo intervalo tal contiene un número racional (ejemplo 4.1), la colección de ellos es enumerable. ◊

Obsérvese que cada componente conexo de un conjunto abierto A es, al mismo tiempo, abierto y cerrado relativo a A, ya que la unión de los demás componentes conexos es un conjunto abierto (prop. 3.3 (iii), prop. 3.8).

Proposición 7.4. *Si f es una función continua definida en un subconjunto conexo* X *de* **R**, *con valores en* **R**, *entonces el conjunto* $f(X)$ *es conexo.*

Demostración. Sean A y B dos subconjuntos abiertos disjuntos de **R** tales que $A \cup B \supset f(X)$. En virtud de la prop. 5.5, los conjuntos $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son abiertos relativos a X. Como, además, $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = X$ y $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$, resulta por hipótesis que uno de los conjuntos $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ es vacío. Si, por ejemplo, $f^{-1}(A) = \emptyset$, entonces $A \cap f(X) = \emptyset$, y de la prop. 3.2 resulta que $f(X)$ es conexo. ◇

En los textos de cálculo es costumbre dar otra formulación a esta proposición y llamarla teorema de Bolzano o teorema del valor intermedio:

Teorema 7.3. *Sea f una función definida y continua en el intervalo $[a, b]$ con valores en* **R**. *Para cada número real* C *entre $f(a)$ y $f(b)$ existe un punto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = C$.*

Demostración. En virtud del teorema 7.1 y de la prop. 7.4, el conjunto $f([a, b])$ es un intervalo. Si, por ejemplo, $f(a) < f(b)$, entonces en virtud del lema 7.1 cada $C \in \mathbf{R}$ tal que $f(a) < C < f(b)$ pertenece a $f([a, b])$. ◇

Ejercicios

1) Demuéstrese que si A es un subconjunto abierto y M un subconjunto arbitrario de **R**, entonces A + M es un conjunto abierto. (Utilícese el hecho de que, para $m \in M$, se tiene $\tau_m^{-1}(A) = A + m = \{a + m \mid a \in A\}$, donde τ_m es la aplicación $x \mapsto x - m$; además, $A + M = \bigcup_{m \in M} A + m$.)

2) Demuéstrese que si K es un subconjunto compacto y F un subconjunto cerrado de **R**, entonces K + F es un conjunto cerrado. (Si $(x_n + y_n)$, con $x_n \in K$ e $y_n \in F$, converge hacia z, entonces existe (x_{n_k}) que converge hacia $x \in K$, e (y_{n_k}) converge hacia $z - x = y \in F$.)

3) Dése un ejemplo de dos conjuntos cerrados F y G tales que F + G no sea cerrado.

2

LA TOPOLOGIA DEL ESPACIO EUCLIDIANO

§ 1. El Espacio Numérico p-dimensional

Sea p un número entero estrictamente positivo. Los elementos del espacio numérico p-dimensional $\mathbf{R}^p$ son las p-tuplas $x = (x_1, \ldots, x_p)$ de números reales $x_j (1 \leq j \leq p)$. Los elementos $x \in \mathbf{R}^p$ se llaman también *vectores* o puntos y el número x_j se llama la j-ésima coordenada o componente del vector x.

Sobre el conjunto $\mathbf{R}^p$ se definen dos operaciones algebraicas:

a) la *adición*, que a cada pareja $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $y = (y_1, \ldots, y_p)$ de vectores hace corresponder el vector $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_p + y_p)$, llamado la *suma* de x e y;

b) la *multiplicación por un número real* (que en este caso se llama también un *escalar*) que a cada escalar $\alpha \in \mathbf{R}$ y a cada vector $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbf{R}^p$ hace corresponder el vector $\alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_p)$, llamado el *producto* de α por x.

Estas dos operaciones tienen las propiedades siguientes:

(EV1) Para toda pareja x, y de vectores se tiene $x + y = y + x$ (ley conmutativa de la adición).

(EV2) Para toda terna x, y, z de vectores se tiene $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ley asociativa de la adición).

(EV3) Existe un vector 0, llamado el vector cero o el origen de $\mathbf{R}^p$, tal que $x + 0 = x$ para todo $x \in \mathbf{R}^n$.

(EV4) Para cada vector x existe un vector $-x$, llamado el opuesto de x, tal que $x + (-x) = 0$.

(EV5) Para todo escalar α y toda pareja x, y de vectores se tiene $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (distributividad con respecto a la adición de vectores).

(EV6) Para toda pareja α, β de escalares y todo vector x se tiene $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (distributividad con respecto a la adición de escalares).

(EV7) Para toda pareja α, β de escalares y todo vector x se tiene $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ (ley asociativa de la multiplicación por un escalar).

(EV8) Para todo vector x se tiene $1x = x$.

En efecto, el vector cero es aquél cuyos componentes son todos iguales a 0, y el opuesto de $x = (x_1, \ldots, x_p)$ es el vector $-x = (-x_1, \ldots, -x_p)$. La verificación de las propiedades (EV1), (EV2), (EV5)-(EV8) es inmediata. Demostremos por ejemplo (EV1). Tenemos $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_p + y_p)$ e $y + x = (y_1 + x_1, \ldots, y_p + x_p)$. Ahora bien, para cada $j (1 \leq j \leq p)$ se tiene $x_j + y_j = y_j + x_j$ en virtud de la ley conmutativa de la adición de números reales, y por lo tanto, los vectores $x + y$ e $y + x$ son iguales.

Obsérvese que se utiliza el símbolo 0 para representar el número cero y también el vector cero; esta ambigüedad no causa, en general, confusión.

Las propiedades (EV1)-(EV8) se llaman los axiomas de los espacios vectoriales, y se dice que las dos operaciones algebraicas definen sobre $\mathbf{R}^p$ una estructura de *espacio vectorial*. De los axiomas se deducen todas las reglas usuales del álgebra vectorial; a continuación se demuestran algunas.

Proposición 1.1. *Para todo vector x se tiene $0x = 0$* (aquí en el primer miembro tenemos el número cero y en el segundo miembro el vector cero).

Demostración. En virtud de (EV6) y (EV8) tenemos

$$x = 1 \cdot x = (1 + 0)x = 1x + 0x = x + 0x.$$

Agregando $-x$ a ambos miembros y tomando en cuenta (EV2) se obtiene $0 = 0x$. ◇

Proposición 1.2. *Para todo escalar $\alpha \in \mathbf{R}$ se tiene $\alpha 0 = 0$.*

Demostración. En virtud de (EV5), se tiene $\alpha 0 = \alpha(0 + 0) = \alpha 0 + \alpha 0$. Agregando $-\alpha 0$ a ambos lados y tomando (EV2) en cuenta resulta $0 = \alpha 0$. ◇

Proposición 1.3. *El vector 0 es único.*

Demostración. Supongamos que existen dos vectores 0 y 0' tales que $x + 0 = x$ y $x + 0' = x$ para todo $x \in \mathbf{R}^n$. Entonces, en virtud de (EV1), se tiene $0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'$. ◇

Proposición 1.4. *El opuesto de un vector* x *es único.*

Demostración. Sean x' y x'' dos vectores tales que $x + x' = 0$ y $x + x'' = 0$. En virtud de (EV1), (EV2) y (EV3) tenemos entonces

$$x' = x' + 0 = x' + (x + x'') = (x' + x) + x'' = 0 + x'' = x''. \ \Diamond$$

Proposición 1.5. *Dado dos vectores* a *y* b *existe un vector* x, *y uno sólo, tal que* $a + x = b$.

Demostración. Si tal vector x existe, entonces agregando $-a$ a ambos miembros de la ecuación $a + x = b$ se tiene $x = b + (-a)$, lo que demuestra la unicidad de la solución. Inversamente, se tiene $a + (b + (-a)) = (a + (-a)) + b = b$, es decir, $b + (-a)$ es solución de la ecuación. $\Diamond$

El vector $a + (-b)$ se escribe $a - b$ y se llama la diferencia de a y b.

Definición 1.1. *La norma o longitud euclidiana del vector* $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbf{R}^p$ *es la raíz cuadrada positiva de* $x_1^2 + \ldots + x_p^2$, *y se denota por* $|x|$.

Obsérvese que en el caso $p = 1$, la norma de $x \in \mathbf{R}$ es su valor absoluto. Utilizando el teorema 1.7.3 y el ejercicio 1.5.4, poniendo $n = 2$, es fácil demostrar que cada número real positivo tiene una raíz cuadrada positiva y sólo una.

Proposición 1.6. *La función* $x \mapsto |x|$ *definida en* $\mathbf{R}^p$ *y con valores en el conjunto* $\mathbf{R}_+$ *de los números reales positivos, tiene las propiedades siguientes:*

(N1) $|x| = 0$ *si, y sólo si,* $x = 0$.

(N2) *Para todo escalar* $\alpha \in \mathbf{R}$ *y todo vector* $x \in \mathbf{R}^p$ *se tiene* $|\alpha x| = |\alpha| \cdot |x|$.

(N3) *Para toda pareja* x, y *de vectores se tiene*

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

(desigualdad del triángulo).

Demostración. El cuadrado α^2 de cualquier número real es positivo y además $\alpha^2 = 0$ si, y sólo si, $\alpha = 0$. De aquí sigue que $|x| = (x_1^2 + \ldots + x_p^2)^{\frac{1}{2}}$ es igual a cero si, y sólo si, $x_1 = \ldots = x_n = 0$, es decir $x = 0$.

Para $\alpha \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}^p$ se tiene

$$\begin{aligned} |\alpha x| &= (\alpha^2 x_1^2 + \ldots + \alpha^2 x_p^2)^{\frac{1}{2}} = \{\alpha^2(x_1^2 + \ldots + x_p^2)\}^{\frac{1}{2}} \\ &= |\alpha| \cdot (x_1^2 + \ldots + x_p^2)^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \cdot |x|. \end{aligned}$$

Falta entonces demostrar la desigualdad del triángulo. Para esto necesitaremos el siguiente lema:

Lema 1.1. *Si* $x_1, \ldots, x_p$ e $y_1, \ldots, y_p$ *son números reales arbitrarios vale la desigualdad*

$$\left| \sum_{j=1}^{p} x_j y_j \right| \leqq \left(\sum_{j=1}^{p} x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{p} y_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

(desigualdad de Cauchy-Schwarz).

Demostración. Se tiene la relación

$$(1) \quad \left(\sum_{j=1}^{p} x_j y_j \right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{p} x_j^2 \right)\left(\sum_{j=1}^{p} y_j^2 \right) - \sum_{1 \leqq j < k \leqq p} (x_j y_k - x_k y)^2$$

llamada la identidad de Lagrange. En efecto,

$$\left(\sum_{j=1}^{p} x_j y_j \right)^2 = \sum_{j=1}^{p} x_j^2 y_j^2 + 2 \sum_{1 \leqq j < k \leqq p} x_j y_j x_k y_k =$$

$$= \sum_{j=1}^{p} x_j^2 y_j^2 + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{p} x_j^2 y_k^2 - \sum_{1 \leqq j < k \leqq p} (x_j^2 y_k^2 + x_k^2 y_j^2 - 2(x_j y_k x_k y_j)) =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{p} x_j^2 \right)\left(\sum_{j=1}^{p} y_j^2 \right) - \sum_{1 \leqq j < k \leqq p} (x_j y_k - x_k y_j)^2.$$

El último término del segundo miembro de (1) es una suma de cuadrados y por lo tanto positivo. De aquí resulta la desigualdad

$$\left(\sum_{j=1}^{p} x_j y_j \right)^2 \leqq \left(\sum_{j=1}^{p} x_j^2 \right)\left(\sum_{j=1}^{p} y_j^2 \right).$$

Tomando las raíces cuadradas positivas de ambos miembros se obtiene la desigualdad de Cauchy-Schwarz. ◇

Fin de la demostración de la proposición 1.6. Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene

$$|x + y|^2 = \sum_{j=1}^{p} (x_j + y_j)^2 = \sum_{j=1}^{p} x_j^2 + 2 \sum_{j=1}^{p} x_j y_j + \sum_{j=1}^{p} y_j^2$$

$$\leq |x|^2 + 2|x| \cdot |y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2.$$

Tomando las raíces cuadradas positivas de los miembros extremos resulta la desigualdad del triángulo. ◇

Definición 1.2. *La distancia* (euclidiana) $d(x, y)$ *de dos puntos* $x, y \in \mathbf{R}^p$ *es la norma de la diferencia de* x *e* y, *es decir* $d(x, y) = |x - y|$.

En la proposición siguiente se enuncian aquellas propiedades de la distancia que, en el capítulo tercero, sirven de axiomas de los espacios métricos.

Proposición 1.7. *La distancia es una función que a cada pareja de puntos* $x, y \in \mathbf{R}^p$ *hace corresponder el número real positivo* $d(x, y)$, *y que tiene las propiedades siguientes:*

(M1) $d(x, y) = 0$ *si, y sólo si,* $x = y$.

(M2) *Para cada pareja* x, y *de puntos de* $\mathbf{R}^p$ *se tiene* $d(x, y) = d(y, x)$.

(M3) *Para toda terna* x, y, z *de puntos de* $\mathbf{R}^p$ *se tiene* $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdad del triángulo).

Demostración. De la definición resulta inmediatamente que $d(x, y) \in \mathbf{R}_+$ para cada pareja $x, y \in \mathbf{R}^p$. La relación $d(x, y) = 0$ significa que $|x - y| = 0$, lo que, en virtud de (N1), es equivalente a $x - y = 0$, es decir, a $x = y$.

Puesto que $x - y = (-1)(y - x)$ (ejerc. 2), en virtud de (N2) se tiene $d(x, y) = |x - y| = |(-1)(y - x)| = |-1| \cdot |y - x| = d(y, x)$.

Finalmente, de la identidad $x - z = (x - y) + (y - z)$ y de (N3) se sigue $d(x, z) = |x - z| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z)$. ◇

Ejercicios

1) Demuéstrese la prop. 1.1 por el método de la demostración de la prop. 1.1.2.

2) Demuéstrese que para todo vector $x \in \mathbf{R}^p$ se tiene $(-1)x = -x$.

3) Demuéstrese que para todo vector $x \in \mathbf{R}^p$ se tiene $-(-x) = x$.

4) ¿En qué casos vale el signo de igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwarz?

5) a) Demuéstrese que si $x_1, \ldots, x_p$, $y_1, \ldots, y_p$, $z_1, \ldots, z_p$, $t_1, \ldots, t_p$ son números reales arbitrarios vale la relación

$$\left(\sum_{j=1}^{p} x_j z_j\right)\left(\sum_{j=1}^{p} y_j t_j\right) - \left(\sum_{j=1}^{p} x_j t_j\right)\left(\sum_{j=1}^{p} y_j z_j\right) =$$

$$= \sum_{1 \leqq j < k \leqq p}^{p} (x_j y_k - x_k y_j)(z_j t_k - z_k t_j).$$

(Para $x_j = z_j$, $y_j = t_j$ esto se reduce a la identidad de Lagrange.)

b) Escríbase la identidad de Lagrange en forma matricial y búsquese una generalización de la misma.

6) a) Demuéstrese que si $a > 0$, entonces la expresión $a\lambda^2 + 2b\lambda + c$ es positiva para todo $\lambda \in \mathbf{R}$ si, y sólo si, $b^2 - ac \leqq 0$.

b) Desarrollando $\sum_{j=1}^{p} (\lambda x_j + y_j)^2$ según las potencias de λ, encuéntrese, con la ayuda de a), otra demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

§ 2. Vecindades; Conjuntos Abiertos y Cerrados

En ésta sección empieza la discusión de los conceptos topológicos en el espacio $\mathbf{R}^p$. El desarrollo es paralelo al de la § 2 del primer capítulo. Quedan pues a cargo del lector muchas demostraciones, casi idénticas a las de las proposiciones del capítulo primero designadas con el mismo número.

Definición 2.1. *Sea x un punto de $\mathbf{R}^p$ y ρ un número real positivo. Se llama bola cerrada de centro x y radio ρ, y se denota por $B_\rho(x)$, el conjunto de todos los puntos $y \in \mathbf{R}^p$ cuya distancia de x es inferior o igual a ρ, es decir* $B_\rho(x) = \{y \mid d(x, y) \leqq \rho\}$.

En virtud de (M1), para $\rho = 0$ la bola $B_0(x)$ se reduce al único punto x.

Definición 2.2. *Sea x un punto de $\mathbf{R}^p$ y ρ un número real estrictamente positivo. Se llama bola abierta de centro x y radio ρ, y* *se denota por* $0_\rho(x)$, *el conjunto de todos los puntos* $y \in \mathbf{R}^p$ *cuya distancia de* x *es inferior a* ρ, *es decir* $0_\rho(x) = \{y \mid d(x, y) < \rho\}$.

Definición 2.3. *Sea* x *un punto de* $\mathbf{R}^p$ *y* ρ *un número real positivo. Se llama esfera de centro* x *y radio* ρ, *y se denota por* $S_\rho(x)$, *el conjunto de todos los puntos* $y \in \mathbf{R}^p$ *cuya distancia de* x *es igual a* ρ, *es decir* $S_\rho(x) = \{y \mid d(x, y) = \rho\}$.

Para $\rho > 0$ se tiene obviamente $B_\rho(x) = 0_\rho(x) \cup S_\rho(x)$. Obsérvese también que en el caso $p = 1$ la bola $B_\rho(x)$ es el intervalo $[x - \rho,\ x + \rho]$ y la bola $0_\rho(x)$ es el intervalo $]x - \rho,\ x + \rho[$. En el caso $p = 2$, es costumbre decir disco en vez de bola y circunferencia en vez de esfera.

Definición 2.4. *Una vecindad de un punto* $x \in \mathbf{R}^p$ *es un conjunto* V *que contiene una bola cerrada de centro* x *y radio estrictamente positivo.*

Proposición 2.1. *El conjunto* V *es una vecindad del punto* $x \in \mathbf{R}^p$ *si, y sólo si, contiene una bola abierta de centro* x.

Demostración. Si V es una vecindad de x, entonces contiene una bola $B_\rho(x)$ con $\rho > 0$, y con más razón contiene la bola $0_\rho(x)$.

Inversamente, si V contiene la bola $0_\rho(x)$, también contiene la bola cerrada de centro x y radio $\frac{1}{2}\rho$. ◇

Ahora se pueden demostrar aquellas propiedades de las vecindades de un punto que, como ya se dijo, servirán de axiomas en el capítulo cuarto. Dado un punto $x \in \mathbf{R}^p$, denótese por $\mathcal{V}(x)$ la colección de todas las vecindades de x.

Proposición 2.2. (i) *Si* $V \in \mathcal{V}(x)$ *y* U *es un conjunto que contiene a* V, *entonces* $U \in \mathcal{V}(x)$.

(ii) *Si* $U \in \mathcal{V}(x)$ *y* $V \in \mathcal{V}(x)$, *entonces* $U \cap V \in \mathcal{V}(x)$.

(iii) *Para cada* $V \in \mathcal{V}(x)$ *se tiene* $x \in V$.

(iv) *Para cada* $V \in \mathcal{V}(x)$ *existe* $W \in \mathcal{V}(x)$ *tal que, para todo* $y \in W$, *el conjunto* V *es una vecindad de* y.

Demostración. (i) resulta de la definición. Para demostrar (ii) supóngase que U contiene la bola $B_\rho(x)$ y que V contiene la bola $B_\sigma(x)$, donde $\rho > 0$, $\sigma > 0$. Sea τ el menor de los números ρ y σ. Entonces $U \cap V$ contiene $B_\tau(x)$.

(iii) resulta de que $x \in B_\rho(x)$ para todo $\rho \geqq 0$. Demostremos (iv). Si $V \in \mathcal{V}(x)$, entonces V contiene una bola $0_\rho(x)$ (prop. 2.1), y basta tomar $W = 0_\rho(x)$. En efecto, si y es un punto cualquiera de $0_\rho(x)$, póngase $d(x, y) = \sigma < \rho$, y sea $\tau = \rho - \sigma > 0$. Si $z \in 0_\tau(y)$, entonces $d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z) < \sigma + \tau = \rho$, es decir, $z \in 0_\rho(x) \subset \subset V$. De esta manera V contiene $0_\tau(y)$ y por lo tanto es una vecindad de y (prop. 2.1). ◊

Definición 2.5. *Sea* M *un subconjunto de* $\mathbf{R}^p$. *Un punto* $a \in \mathbf{R}^p$ *es un punto interior de* M *si existe una vecindad* V *de* a *tal que* $V \subset M$. *Un punto* $b \in \mathbf{R}^p$ *es un punto exterior de* M *si existe una vecindad* V *de* b *tal que* $V \cap M = \emptyset$. *Un punto* $c \in \mathbf{R}^p$ *es un punto frontera de* M *si toda vecindad de* c *contiene puntos que pertenecen a* M *y puntos que no pertenecen a* M.

Ejemplo 2.1. Sea M una bola (abierta o cerrada) de centro x y radio $\rho > 0$. Entonces los puntos interiores de M son los que pertenecen a la bola abierta $0_\rho(x)$, los puntos frontera son los que pertenecen a la esfera $S_\rho(x)$ y los puntos exteriores son los puntos y tales que $d(x, y) > \rho$. La primera afirmación resulta de la demostración de la prop. 2.2 (iv). Sea entonces y un punto de $S_\rho(x)$ y V una vecindad de y. El conjunto V contiene una bola $B_\sigma(y)$ con $\rho > \sigma > 0$. Póngase $z = y + \frac{\sigma}{\rho}(y - x)$. Entonces $d(y, z) = |y - z| = \sigma$, es decir $z \in B_\sigma(y) \subset V$, pero $d(x, z) = |x - z| = |x - y + \frac{\sigma}{\rho}(x - y)| = (1 + \frac{\sigma}{\rho})|x - y| = \rho + \sigma > \rho$, es decir, $z \notin B_\rho(x)$. Por otra parte, sea $t = y - \frac{\sigma}{\rho}(y - x)$. Entonces $d(y, t) = |y - t| = \sigma$, es decir, t también pertenece a V, y en este caso $d(x, t) = |x - t| = |x - y - \frac{\sigma}{\rho}(x - y)| = (1 - \frac{\sigma}{\rho})|x - y| = \rho - \sigma < \rho$, es decir $t \in 0_\rho(x)$. Finalmente, si y es un punto tal que $d(x, y) = \tau > \rho$, entonces la bola abierta con centro y y radio $\tau - \rho$ no contiene ningún punto de $B_\rho(x)$. En efecto, si fuera $z \in B_\rho(x) \cap 0_{\tau-\rho}(y)$, entonces se tendría $d(x, y) \leqq \leqq d(x, z) + d(y, z) < \rho + \tau - \rho = \tau$, lo que contradice la definición de τ.

La propiedad característica de las bolas abiertas explicada en el ejemplo anterior conduce a la definición siguiente:

Definición 2.6. *Un subconjunto* A *de* $\mathbf{R}^p$ *es abierto si cada punto de* A *es punto interior de* A.

Enunciemos las propiedades de los conjuntos abiertos que, en el caso de un espacio topológico, pueden servir de axiomas (capítulo cuarto).

Proposición 2.3. (i) *El conjunto vacío y el espacio numérico* $\mathbf{R}^p$ *son conjuntos abiertos.*

(ii) *Si* A *y* B *son conjuntos abiertos, entonces* $A \cap B$ *es un conjunto abierto.*

(iii) *Si* $(A_\iota)_{\iota \in I}$ *es una familia arbitraria de conjuntos abiertos, entonces* $\bigcup_{\iota \in I} A_\iota$ *es un conjunto abierto.*

Definición 2.7. *El conjunto de todos los puntos interiores de un conjunto* $A \subset \mathbf{R}^p$ *se llama el interior de* A *y se denota por* $\mathring{A}$.

De la def. 2.5 y la prop. 2.2 (iii) resulta que $\mathring{A} \subset A$. Además, $A = \mathring{A}$ si, y sólo si, A es abierto.

Proposición 2.4. *El interior* $\mathring{A}$ *de cualquier conjunto* A *es abierto.*

Proposición 2.5. *Un conjunto* V *es vecindad del punto* x *si, y sólo si, contiene un conjunto abierto que contiene a* x.

Proposición 2.6. *El interior* $\mathring{A}$ *de un conjunto* A *es la reunión de todos los conjuntos abiertos contenidos en* A.

Definición 2.8. *Se dice que el punto* $a \in \mathbf{R}^p$ *es adherente al conjunto* $M \subset \mathbf{R}^p$ *si cada vecindad de* a *contiene por lo menos un punto de* M.

Claro está que los puntos adherentes a M son los puntos interiores de M y los puntos frontera de M.

Definición 2.9. *El conjunto de todos los puntos adherentes a un conjunto* $M \subset \mathbf{R}^p$ *se llama la adherencia (o cerradura) de* M *y se denota por* $\bar{M}$. *Un conjunto* $F \subset \mathbf{R}^p$ *es cerrado si* $F = \bar{F}$.

En virtud de la prop. 2.2 (iii), se tiene siempre $M \subset \bar{M}$.

Proposición 2.7. *Para un subconjunto* M *cualquiera de* $\mathbf{R}^p$ *se tiene* $\complement\bar{M} = (\complement M)^\circ$.

Proposición 2.8. *Un conjunto* M *es cerrado si, y sólo si,* $\complement M$ *es abierto.*

Proposición 2.9. *La adherencia* $\bar{M}$ *de cualquier conjunto* M *es un conjunto cerrado.*

Proposición 2.10. *La adherencia* $\bar{M}$ *de un conjunto* M *es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen* M.

Proposición 2.11. (i) *El conjunto vacío y el espacio númerico* $\mathbf{R}^p$ *son conjuntos cerrados.*

(ii) *Si* F *y* G *son conjuntos cerrados, entonces* $F \cup G$ *es un conjunto cerrado.*

(iii) *Si* $(F_\iota)_{\iota \in I}$ *es una familia arbitraria de conjuntos cerrados, entonces* $\bigcap_{\iota \in I} F$ *es un conjunto cerrado.*

Ejercicios

1) Demuéstrese las proposiciones 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10 y 2.11.

2) Generalícense los ejercicios 2)-10) del cap. 1, §2, para el caso $\mathbf{R}^p$.

§ 3. Topología Relativa

El lector verificará fácilmente que todas las definiciones tienen sentido, todas las proposiciones son válidas y las demostraciones conservan su validez, si se reemplaza $\mathbf{R}$ por $\mathbf{R}^p$ en el cap. 1, § 3.

§ 4. Sucesiones Convergentes

En esta sección consideraremos sucesiones de vectores (puntos de $\mathbf{R}^p$), es decir funciones que a cada número entero positivo $n \in \mathbf{N}$ hacen corresponder un vector $x_n \in \mathbf{R}^p$. En vez de $n \mapsto x_n$ se escribe $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ó (x_n). Como siempre, (y_k) es una subsucesión de (x_n) si existe una sucesión estrictamente creciente (n_k) de números $n_k \in \mathbf{N}$ tal que $y_k = x_{n_k}$ para todo $k \in \mathbf{N}$. En tal caso se escribe (x_{n_k}) en vez de (y_k).

Definición 4.1. *Sea* (x_n) *una sucesión de puntos de* $\mathbf{R}^p$. *Se dice que* (x_n) *converge o tiende hacia el punto* $x \in \mathbf{R}^p$, *o que* x *es el límite de* (x_n), *si para cualquier número estrictamente positivo* ε *existe un número entero positivo* $N = N(\varepsilon)$ *tal que* $d(x, x_n) \leqq \varepsilon$ *para todo entero* n *que verifica la condición* $n \geqq N(\varepsilon)$.

El hecho de que x es límite de la sucesión (x_n) se denota $x = \lim_{n \to \infty} x_n$. Se dice que una sucesión (x_n) es *convergente*, o que *converge*, si existe un punto $x \in \mathbf{R}^p$ hacia el cual ella converge.

Proposición 4.1. *La sucesión* (x_n) *converge hacia* x *si, y sólo si, para cada vecindad* V *de* x *existe un número entero positivo* N(V) *tal que* $x_n \in V$, *para todo* $n \geqq N(V)$.

Demostración. Supóngase que (x_n) tiende hacia x, y sea V una vecindad de x. Existe una bola $B_\rho(x)$, con $\rho > 0$, contenida en V (def. 2.4). Sea $N(\rho) \in \mathbf{N}$ tal que $d(x, x_n) \leqq \rho$ para $n \geqq N(\rho)$. Entonces tomando $N(V) = N(\rho)$ se tiene $x_n \in B_\rho(x) \subset V$ para $n \geqq N(V)$.

Inversamente, supóngase que para cada vecindad V de x existe $N(V) \in \mathbf{N}$ tal que $x_n \in V$ para $n \geqq N(V)$, y sea ϵ un número estrictamente positivo. Entonces $V = B_\epsilon(x)$ es una vecindad de x, y tomando $N(\epsilon) = N(V)$, se tiene $x \in V$, es decir, $d(x, x_n) \leqq \epsilon$, para $n \geqq N(\epsilon)$. Por consiguiente (x_n) converge hacia x. ◇

Proposición 4.2. *El punto* $a \in \mathbf{R}^p$ *es adherente al conjunto* $M \subset \mathbf{R}^p$ *si, y sólo si, existe una sucesión* (x_n) *de puntos* $x_n \in M$ *cuyo límite es* a.

Demostración. Supongamos que a es adherente a M. Entonces para cada $n \in \mathbf{N}$ la bola $B_{\frac{1}{n+1}}(a)$ es una vecindad de a y por lo tanto contiene un punto $x_n \in M$ (def. 2.8). Dado un número estrictamente positivo ϵ, existe un entero positivo $N(\epsilon)$ tal que $[N(\epsilon) + 1]^{-1} \leqq \epsilon$ (prop. 1.1.7). Luego, para $n \geqq N(\epsilon)$ se tiene $d(a, x_n) \leqq \frac{1}{n+1} \leqq \frac{1}{N(\epsilon)+1} \leqq \epsilon$, es decir, (x_n) tiende hacia a.

Inversamente, supóngase que existe una sucesión (x_n) de puntos de M que tiende hacia a. Dada una vecindad V de a, existe, en virtud de la prop. 4.1, un $x_n \in M$ que pertenece a V. Por lo tanto, a es adherente a M (def. 2.8). ◇

Sea (x_n) una sucesión de vectores de $\mathbf{R}^p$ que converge hacia el vector x. Dado $\epsilon > 0$, existe $N(\frac{\epsilon}{2})$ tal que $d(x, x_n) \leqq \frac{\epsilon}{2}$ para $n \geqq N(\frac{\epsilon}{2})$. En virtud de la desigualdad del triángulo (M3), tenemos

$$d(x_n, x_m) \leqq d(x, x_n) + d(x, x_m) \leqq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \text{para} \quad n, m \geqq N(\tfrac{\epsilon}{2}).$$

Esto conduce a la definición siguiente:

Definición 4.2. *Una sucesión* (x_n) *de puntos de* $\mathbf{R}^p$ *es una sucesión de Cauchy si para cada número estrictamente positivo* ϵ *existe un número entero positivo* $N(\epsilon)$ *tal que* $d(x_n, x_m) \leqq \epsilon$ *para toda pareja* (n, m) *de números enteros que verifican las condiciones* $n \geqq N(\epsilon)$ *y* $m \geqq N(\epsilon)$.

Con esta terminología se puede decir que cada sucesión convergente es una sucesión de Cauchy. Es una propiedad fundamental del espacio numérico $\mathbf{R}^p$ la certeza de la afirmación inversa, es decir:

Teorema 4.1. *Cada sucesión de Cauchy de puntos de* $\mathbf{R}^p$ *es convergente*

Demostración. En primer lugar, obsérvese que si $x = (x_1, \ldots, x_p)$ e $y = (y_1, \ldots, y_p)$ son dos puntos de $\mathbf{R}^p$, entonces para cada número entero j, con $1 \leqq j \leqq p$ se tiene $|x_j - y_j| \leqq d(x, y)$, ya que

$$|x - y|^2 = (x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_p - y_p)^2 \geqq (x_j - y_j)^2.$$

Sea ahora $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ una sucesión de Cauchy y denotemos por $x_1^{(n)}, \ldots, x_p^{(n)}$ las coordenadas del vector x_n. Para cada $\epsilon > 0$ se tiene $N(\epsilon)$ tal que $d(x_n, x_m) \leqq \epsilon$, si $n, m \geqq N(\epsilon)$. En virtud de la observación hecha al principio, para cada número entero j tal que $1 \leqq j \leqq p$ se tiene $|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}| \leqq \epsilon$ si $n, m \geqq N(\epsilon)$, es decir, $(x_j^{(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ es una sucesión de Cauchy de números reales. Del teorema 1.4.2 resulta que, para cada j, la sucesión $(x_j^{(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ tiene un límite $y_j \in \mathbf{R} (1 \leqq j \leqq p)$. Sea y el vector $(y_1, \ldots, y_p)$ de $\mathbf{R}^p$.

Sea ϵ un número real estrictamente positivo. Para cada j con $1 \leqq j \leqq p$ existe un número entero N_j tal que $|y_j - x_j^{(n)}| \leqq \frac{\epsilon}{\sqrt{p}}$ para $n \geqq N_j$. Si N es el mayor de los números $N_1, \ldots, N_p$, se tiene $d(y, x_n) = \{(y_1 - x_1^{(n)})^2 + \ldots + (y_p - x_p^{(n)})^2\}^{\frac{1}{2}} \leqq \{\frac{\epsilon^2}{p} + \ldots + \frac{\epsilon^2}{p}\}^{\frac{1}{2}} = \epsilon$ para $n \geqq N$. Por consiguiente, (x_n) converge hacia y. ◊

Definición 4.3. *Sea* X *un subconjunto de* $\mathbf{R}^p$. *Se dice que el subconjunto* Y *de* X *es denso en* X *si la adherencia* $(Y)^-_X$ *de* Y *relativa a* X *es igual a* X.

Las tres proposiciones siguientes se demuestran exactamente como las proposiciones correspondientes del capítulo primero.

Proposición 4.3. *Sea* X *un subconjunto de* $\mathbf{R}^p$ *e* Y *un subconjunto de* X. *Las condiciones siguientes son equivalentes:*

(a) Y *es denso en* X.

(b) *Cualquiera que sea el punto* $x \in X$, *para cada vecindad* V *de* x *relativa a* X *se tiene* $V \cap Y \neq \emptyset$.

(c) *Para cada subconjunto no vacío* A *de* X, *abierto relativo a* X, *se tiene* $A \cap Y \neq \emptyset$.

Proposición 4.4. *Sea* X *un subconjunto de* $\mathbf{R}^p$. *El subconjunto* Y *de* X *es denso en* X *si, y sólo si, la adherencia* $\bar{Y}$ *de* Y *en* $\mathbf{R}^p$ *contiene a* X.

Proposición 4.5. *Sea* X *un subconjunto de* $\mathbf{R}^p$. *El subconjunto* Y *de* X *es denso en* X *si, y sólo si, para cada* $x \in X$ *existe una sucesión* (y_n) *de puntos de* Y *que converge hacia* x.

Ejemplo 4.1. Sea $\mathbf{Q}^p$ el conjunto de todos los vectores $y = (y_1, \ldots, y_p)$ cuyas coordenadas y_j son números racionales. Entonces $\mathbf{Q}^p$ es denso en $\mathbf{R}^p$. En efecto, sea $x = (x_1, \ldots, x_p)$ un punto cualquiera de $\mathbf{R}^p$, y ρ un número estrictamente positivo. En virtud del ejemplo 1.4.1, para cada j, con $1 \leqq j \leqq p$, existe un número $y_j \in \mathbf{Q}$ tal que $|x_j - y_j| \leqq \frac{\rho}{\sqrt{p}}$. Por lo tanto, si y es el vector $(y_1, \ldots, y_p) \in \mathbf{Q}^p$, se tiene $d(x, y) = \{\sum_{j=1}^{p} (x_j - y_j)^2\}^{\frac{1}{2}} \leqq \rho$, es decir, $y \in B_\rho(x)$. La afirmación resulta entonces de la prop. 4.3.

Ejercicios

1) Demuéstrese las proposiciones 4.3, 4.4 y 4.5.

2) Generalícense los ejercicios 3), 4), 7), 8) del cap. 1, § 4 al caso de $\mathbf{R}^p$.

3) Sea (B_n) una sucesión de bolas tales que $B_n \supset B_{n+1}$ para todo $n \in \mathbf{N}$ y cuyo radio tiende a cero. Demuéstrese que existe un punto, y sólo uno, que pertenece a todas las B_n.

§ 5. Funciones Continuas

En esta sección las letras p, q y r representan tres números enteros estrictamente positivos.

Definición 5.1. *Sea* f *una función definida en un subconjunto* X *de* $\mathbf{R}^p$ *y con valores en* $\mathbf{R}^q$. *Se dice que* f *es continua en el punto* $x \in X$, *si para cualquier vecindad* W *de* $f(x)$, *el conjunto* $f^{-1}(W)$ *es una vecindad de* x *relativa a* X.

Proposición 5.1. *Sea* X *un subconjunto de* $\mathbf{R}^p$ *y* x *un punto de* X. *Una función* $f: X \to \mathbf{R}^q$ *es continua en el punto* x *si, y sólo si, para cada vecindad* W *de* $f(x)$ *existe una vecindad* V *de* x *relativa a* X *tal que* $f(V) \subset W$.

Demostración. Idéntica a la de la prop. 1.5.1.

Proposición 5.2. *Sea* X *un subconjunto de* $\mathbf{R}^p$ *y* x *un punto de* X. *Una función* $f: X \to \mathbf{R}^q$ *es continua en el punto* x *si, y sólo si, para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que de las condiciones* $d(x, y) \leqq \delta$, $y \in X$, *se sigue* $d(f(x), f(y)) \leqq \epsilon$.

Demostración. Supóngase primero que f es continua en x, y sea $\epsilon > 0$. La bola $B_\epsilon(f(x))$ es una vecindad de $f(x)$ en $\mathbf{R}^q$, luego, por la prop. 5.1 y la def. 3.1, existe una vecindad U de x en $\mathbf{R}^p$ tal que $y \in U \cap X$ implica $f(y) \in B_\epsilon(f(x))$. La vecindad U de x contiene una bola $B_\delta(x)$ con $\delta > 0$ (def. 2.4), y por lo tanto, las condiciones $d(x, y) \leq \delta$, $y \in X$ implican $d(f(x), f(y)) \leq \epsilon$.

Inversamente, supóngase que se cumple la condición de la proposición, y sea W una vecindad de $f(x)$ en $\mathbf{R}^q$. En virtud de la def. 2.4 existe $\epsilon > 0$ tal que $d(f(x), z) \leq \epsilon$ implica $z \in W$. Por hipótesis, existe $\delta > 0$ tal que para todo $y \in X$ que verifica $d(x, y) \leq \delta$, se tiene $d(f(x), f(y)) \leq \epsilon$, es decir $f(y) \in W$. Luego $V = B_\delta(x) \cap X$ es una vecindad de x relativa a X tal que $f(V) \subset W$. La continuidad de f en x resulta entonces de la prop. 5.1. ◇

Proposición 5.3. *Sea* X *un subconjunto de* $\mathbf{R}^p$ *y* x *un punto de* X. *Una función* $f: X \to \mathbf{R}^q$ *es continua en el punto* x *si, y sólo si, para cada sucesión* (x_n) *de puntos* $x_n \in X$ *que converge hacia* x, *la sucesión* $(f(x_n))$ *converge hacia* $f(x)$.

Demostración. Supóngase que f es continua en x, y sea (x_n) una sucesión de puntos de X que converge hacia x. Dada una vecindad W de $f(x)$ en $\mathbf{R}^q$, existe una vecindad U de x en $\mathbf{R}^p$ tal que $f(U \cap X) \subset W$ (prop. 5.1). En virtud de la prop. 4.1, existe un número entero positivo N tal que $x_n \in U$ para $n \geq N$. Por consiguiente, $f(x_n) \in W$ para $n \geq N$, es decir, $(f(x_n))$ converge hacia $f(x)$.

58

Ahora supóngase que f no es continua en el punto x. Entonces existe una vecindad W de $f(x)$ en $\mathbf{R}^q$ tal que para ninguna vecindad V de x relativa a X se tiene $f(V) \subset W$. Para cada $n \in N$ sea x_n un punto de X que pertenece a la bola $B_{1/(n+1)}(x)$ y tal que $f(x_n)$ no pertenece a W. Dado un número $\epsilon > 0$, existe un entero positivo $N(\epsilon)$ tal que $[N(\epsilon) + 1]^{-1} \leq \epsilon$ (prop. 1.1.7), y por lo tanto, $d(x, x_n) \leq \leq \dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{N(\epsilon)+1} \leq \epsilon$ para $n \geq N(\epsilon)$, es decir, (x_n) tiende hacia x. Por otra parte está claro que $(f(x_n))$ no tiende hacia $f(x)$. ◇

Proposición 5.4. *Sea* X *un subconjunto de* $\mathbf{R}^p$ *e* Y *un subconjunto de* $\mathbf{R}^q$. *Sea además* f *una función definida en* x *con valores en* $\mathbf{R}^q$ *tal que* $f(X) \subset Y$, *y sea* g *una función definida en* Y *con valores en* $\mathbf{R}^r$. *Si* f *es continua en* $x \in X$ y g *es continua en* $f(x) \in Y$, *entonces* $g \circ f$ *es continua en* x.

Demostración. Análoga a la de la prop. 1.5.4.

Definición 5.2. *Sea* f *una función definida en un subconjunto* X *de* $\mathbf{R}^p$ *y con valores en* $\mathbf{R}^q$. *Se dice que* f *es continua, o que* f *es continua sobre* X, *si es continua en cada punto de* X.

Las tres proposiciones que siguen se demuestran de manera análoga a las proposiciones correspondientes del primer capítulo.

Proposición 5.5. *Sea f una función definida en un subconjunto* X *de* $\mathbf{R}^p$, *y con valores en* $\mathbf{R}^q$. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *f es continua.*

(b) *Para cada conjunto abierto* A *en* $\mathbf{R}^q$, *el conjunto* $f^{-1}(A)$ *es abierto relativo a* X.

(c) *Para cada conjunto cerrado* F *en* $\mathbf{R}^q$, *el conjunto* $f^{-1}(F)$ *es cerrado relativo a* X.

Corolario. *Sea f una función definida en un subconjunto* X *de* $\mathbf{R}^p$ *y con valores en la recta real* $\mathbf{R}$. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *f es continua.*

(b') *Para cada número real a, los conjuntos* $\{x \in X \mid f(x) < a\}$ *y* $\{x \in X \mid f(x) > a\}$ *son abiertos relativos a* X.

(c') *Para cada número real a, los conjuntos* $\{x \in X \mid f(x) \leqq a\}$ *y* $\{x \in X \mid f(x) \geqq a\}$ *son cerrados relativos a* X.

Proposición 5.6. *Si la función $f : X \to \mathbf{R}^q$ es continua, entonces la restricción $f|T$ de f a cualquier subconjunto* T *de* X *es también continua.*

Proposición 5.7. *Toda función constante que a todo $x \in \mathbf{R}^p$ hace corresponder el mismo valor $c \in \mathbf{R}^q$ es continua sobre* $\mathbf{R}^p$.

Ahora consideraremos otros ejemplos de funciones continuas sobre el espacio numérico o sus subconjuntos. Primero, sin embargo, es necesario recordar el concepto de *producto cartesiano*. Sean X e Y dos conjuntos arbitrarios. El producto cartesiano de X e Y, denotado por $X \times Y$, es el conjunto de todas las parejas (x, y), donde x es un elemento de X e y es un elemento de Y. Así, dos parejas (x, y) y (x', y') definen el mismo elemento de $X \times Y$ si, y sólo si, $x = x'$ e $y = y'$.

Por ejemplo, el producto cartesiano $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ es precisamente el conjunto $\mathbf{R}^2$. Más generalmente, si $x = (x_1, \ldots, x_p)$ es un punto de $\mathbf{R}^p$ e $y = (y_1, \ldots, y_q)$ es un punto de $\mathbf{R}^q$, se identifica el punto (x, y) de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$ con el punto $z = (z_1, \ldots, z_{p+q})$ de $\mathbf{R}^{p+q}$, donde $z_j = x_j$ para $1 \leqq j \leqq p$ y $z_{p+k} = y_k$ para $1 \leqq k \leqq q$. Así se obtiene una identificación entre el producto cartesiano $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$ y el espacio $\mathbf{R}^{p+q}$. Si X es un subconjunto de $\mathbf{R}^p$ e Y es un subconjunto de $\mathbf{R}^q$, esta identificación permite considerar $X \times Y$ como un subconjunto de $\mathbf{R}^{p+q}$.

Si $z = (x, y) \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$, entonces $|z|^2 = \sum_{j=1}^{p+q} z_j^2 = \sum_{j=1}^{p} x_j^2 + \sum_{k=1}^{q} y_k^2 = |x|^2 + |y|^2$, es decir, $|z| = (|x|^2 + |y|^2)^{\frac{1}{2}}$. Por lo tanto, si $z = (x, y)$ y $z' = (x', y')$ son dos puntos de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q = \mathbf{R}^{p+q}$, se tiene $d(z, z') = (d(x, x')^2 + d(y, y')^2)^{\frac{1}{2}}$. En particular, $d(x, x') \leqq d(z, z')$ y $d(y, y') \leqq d(z, z')$.

Teorema 5.1. *Sean* X *un subconjunto de* $\mathbf{R}^p$, f *una función definida en* X *con valores en* $\mathbf{R}^q$, *y* g *una función definida en* X *con valores en* $\mathbf{R}^r$. *Entonces la función* $h: x \mapsto (f(x), g(x))$, *definida en* X *con valores en* $\mathbf{R}^{q+r}$, *es continua si, y sólo si, las dos funciones* f *y* g *son continuas.*

Demostración. Supongamos primero que f y g son continuas sobre X y sea x un punto de X. Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que las condiciones $d(x, x') \leqq \delta_1$ y $x' \in X$ implican $d(f(x), f(x')) \leqq \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$, y un $\delta_2 > 0$ tal que las condiciones $d(x, x') \leqq \delta_2$ y $x' \in X$ implican $d(g(x), g(x')) \leqq \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$ (prop. 5.2). Si δ es el menor de los dos números δ_1 y δ_2, entonces las condiciones $d(x, x') \leqq \delta$ y $x' \in X$ implican $d(h(x), h(x')) \leqq \leqq \left\{\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \epsilon$, es decir, h es continua en x (prop. 5.2).

Inversamente, supóngase que h es continua. Sea x un punto de X y ϵ un número >0. Existe $\delta > 0$ tal que $d(x, x') \leqq \delta$ y $x' \in X$ implican $d(h(x), h(x')) \leqq \epsilon$. Puesto que $d(f(x), f(x')) \leqq d(h(x), h(x'))$ y $d(g(x), g(x')) \leqq d(h(x), h(x'))$, vemos que f y g son continuas en x (prop. 5.2). ◇

Teorema 5.2. *Sea* X *un subconjunto de* $\mathbf{R}^p$ *e* Y *un subconjunto de* $\mathbf{R}^q$. *Si la función* $(x, y) \mapsto f(x, y)$ *definida sobre* $X \times Y$ *y con valores en* $\mathbf{R}^r$ *es continua, entonces para cada* $b \in Y$ *la función* $x \mapsto f(x, b)$ *definida en* X *con valores en* $\mathbf{R}^r$ *es continua, y para cada* $a \in X$ *la función* $y \mapsto f(a, y)$ *definida en* Y *con valores en* $\mathbf{R}^r$ *es continua.*

Demostración. Evidentemente, basta demostrar la primera afirmación. Sea x un punto de X y ϵ un número >0. Por hipótesis, existe $\delta > 0$ tal que las condiciones $d((x, b), (x', y')) \leqq \delta$, $x' \in X$, $y' \in Y$ implican $d(f(x, b), f(x', y')) \leqq \epsilon$. En particular, si $d(x, x') \leqq \leqq \delta$, $x' \in X$, de la relación $d((x, b), (x', b)) = d(x, x')$ resulta que $d(f(x, b), f(x', b)) \leqq \epsilon$, es decir $x' \mapsto f(x', b)$ es continua en x. ◇

Teorema 5.3. *La aplicación* $(x, y) \mapsto x + y$ *de* $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p$ *en* $\mathbf{R}^p$ *es continua.*

Demostración. Sea $z = (x, y)$ un punto de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p$ y $\varepsilon > 0$. Si $d(z, z') \leq \frac{\varepsilon}{2}$, donde $z' = (x', y') \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p$, entonces con más razón $d(x, x') \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $d(y, y') \leq \frac{\varepsilon}{2}$, y por lo tanto

$$d(x + y, x' + y') = |(x + y) - (x' + y')| = |x - x' + y - y'| \leq$$

$$\leq |x - x'| + |y - y'| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \ \diamond$$

Corolario 1. *Sea* X *un subconjunto de* $\mathbf{R}^p$, *y* f *y* g *dos funciones continuas sobre* X, *con valores en* $\mathbf{R}^q$. *Entonces la función* $x \mapsto f(x) + g(x)$ *es continua sobre* X.

Demostración. La función $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$ es la composición de las funciones $x \mapsto (f(x), g(x))$ y $(y, z) \mapsto y + z$. La primera es continua, en virtud del teorema 5.1, y la segunda lo es, en virtud del teorema 5.3. Entonces $f + g$ es continua en virtud de la prop. 5.4. $\diamond$

Corolario 2. *Para cada* $a \in \mathbf{R}^p$ *la función* $x \mapsto x + a$ *es continua sobre* $\mathbf{R}^p$.

Esto es consecuencia inmediata de los teoremas 5.2 y 5.3, y generaliza la prop. 1.5.8.

Obsérvese que para establecer que una función $f : \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \to \mathbf{R}^r$, donde $\mathrm{X} \subset \mathbf{R}^p$ e $\mathrm{Y} \subset \mathbf{R}^q$, es continua en el punto $z = (x, y) \in \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$, basta demostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existen dos números $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ tales que las condiciones $d(x, x') \leq \delta_1$, $x' \in \mathrm{X}$, $d(y, y') \leq \delta_2$, e $y' \in \mathrm{Y}$ implican $d(f(x, y), f(x', y')) \leq \varepsilon$. En efecto, si a y b son dos números reales denótese por $\min(a, b)$ el menor de ellos. Entonces, si la condición mencionada subsiste, y si se pone $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, la condición $d(z, z') \leq \delta$, $z' = (x', y') \in \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ implica $d(x, x') \leq \delta \leq \delta_1$, $x' \in \mathrm{X}$, $d(y, y') \leq \delta \leq \delta_2$, $y' \in \mathrm{Y}$, y por lo tanto $d(f(z), f(z')) \leq \varepsilon$. Esta sencilla observación recibirá una interpretación más profunda en la § 1 del apéndice.

Teorema 5.4. *La aplicación* $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ *de* $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^p$ *en* $\mathbf{R}^p$ *es continua.*

Demostración. Para cualquier pareja α, β de escalares y cualquier pareja x, y de vectores se tiene

$$\alpha x - \beta y = (\alpha - \beta)(y - x) + (\alpha - \beta)x + \alpha(x - y).$$

Sea (α, x) un punto de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^p$ y ϵ un número >0. Hay que distinguir cuatro casos:

1) Si $\alpha = 0$, $x = 0$, entonces de $|\beta| \leq \sqrt{\epsilon}$ y $d(x, y) = |y| \leq \sqrt{\epsilon}$ resulta $d(\alpha x, \beta y) = |\beta y| = |\beta| \cdot |y| \leq \epsilon$.

2) Si $\alpha = 0$, $x \neq 0$, entonces de

$$|\beta| \leq \min\left(\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}, \frac{\epsilon}{2|x|}\right), \quad d(x, y) \leq \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}$$

resulta

$$d(\alpha x, \beta y) = |\alpha x - \beta y| \leq |\beta| \cdot |y - x| + |\beta| \cdot |x| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

3) Si $\alpha \neq 0$, $x = 0$, entonces de

$$|\alpha - \beta| \leq \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}, \quad d(x, y) = |y| \leq \min\left(\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}, \frac{\epsilon}{2|\alpha|}\right)$$

resulta

$$d(\alpha x, \beta y) = |\alpha x - \beta y| \leq |\alpha - \beta| \cdot |y| + |\alpha| \cdot |y| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

4) Finalmente, si $\alpha \neq 0$, $x \neq 0$, entonces de

$$|\alpha - \beta| \leq \min\left(\sqrt{\frac{\epsilon}{3}}, \frac{\epsilon}{3|x|}\right), \quad d(x, y) \leq \min\left(\sqrt{\frac{\epsilon}{3}}, \frac{\epsilon}{3|\alpha|}\right)$$

resulta

$$\begin{aligned} d(\alpha x, \beta y) &\leq |\alpha - \beta| \cdot |y - x| + |\alpha - \beta| \cdot |x| + |\alpha| \cdot |x - y| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \ \diamond \end{aligned}$$

Corolario 1. *Sean* X *un subconjunto de* $\mathbf{R}^p$ *y* f *y* g *dos funciones continuas sobre* X, *con valores en* $\mathbf{R}$. *Entonces la función* $x \mapsto f(x)g(x)$ *es continua en* X.

Demostración. La función $fg : x \mapsto f(x)g(x)$ es la composición de las funciones $x \mapsto (f(x), g(x))$ y $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta$. La primera es continua, en virtud del teorema 5.1, y la segunda también lo es, en virtud del teorema 5.4 aplicado al caso particular $p = 1$. Por tanto fg es continua en virtud de la prop. 5.4. $\diamond$

Corolario 2. *Para cada* $\alpha \in \mathbf{R}$ *la función* $x \mapsto \alpha x$ *es continua sobre* $\mathbf{R}^p$.

Corolario 3. *Para cada* $x \in \mathbf{R}^p$ *la función* $\alpha \mapsto \alpha x$ *definida en* $\mathbf{R}$ *y con valores en* $\mathbf{R}^p$ *es continua.*

Ambos corolarios resultan inmediatamente de los teoremas 5.2 y 5.4 y generalizan las proposiciones 1.5.9 y 1.5.10.

Ejercicios

1) Demuéstrese las proposiciones 5.1, 5.4, 5.5 y su corolario, 5.6 y 5.7.

2) Generalícese el ejercicio 1) del cap. primero, § 5, al caso de una función definida en un subconjunto X de $\mathbf{R}^p$ y con valores en $\mathbf{R}^q$.

3) Generalícese el ejercicio 2) del cap. primero, § 5, al caso de una función definida en un subconjunto de $\mathbf{R}^p$.

4) Demuéstrese que la función $x \mapsto |x|$ definida sobre $\mathbf{R}^p$ con valores en $\mathbf{R}$ es continua.

5) Demuéstrese que la función $(x, y) \mapsto d(x, y)$ definida sobre $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p$ con valores en $\mathbf{R}$ es continua

6) Demuéstrese que si f es una función continua definida en un subconjunto X de $\mathbf{R}^p$, con valores en $\mathbf{R}$, tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, entonces la función $x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$ es continua sobre X.

§ 6. Conjuntos Compactos

Definición 6.1. *Un subconjunto* K *del espacio numérico* $\mathbf{R}^p$ *se dice compacto si, para cada recubrimiento* $(A_\iota)_{\iota \in I}$ *de* K *con conjuntos abiertos* A_ι, *existe una subfamilia finita* $A_{\iota_1}, \ldots, A_{\iota_m}$ *que cubre* K.

En virtud de la prop. 3.2, la definición anterior equivale a decir que K es compacto si para cada recubrimiento $(A_\iota)_{\iota \in I}$ de K con conjuntos $A_\iota \subset K$, abiertos relativos a K, existe una subfamilia finita $(A_{\iota_k})_{1 \leq k \leq m}$ que cubre K.

Como se ha hecho hasta ahora en este capítulo, se dejarán a cargo del lector las demostraciones de los resultados que son idénticas o casi idénticas a aquéllas de los resultados correspondientes de la § 6 del primer capítulo.

Proposición 6.1. *Un subconjunto* K *de* $\mathbf{R}^p$ *es compacto si, y sólo si, para cada familia* $(F_\iota)_{\iota \in I}$ *de conjuntos cerrados* F_ι *tal que*

$(\bigcap_{t \in I} F_t) \cap K = \emptyset$ *existe una subfamilia finita* $F_{t_1}, \ldots, F_{t_m}$ *tal que* $(\bigcap_{t \in 1}^{m} F_{t_k}) \cap K = \emptyset$.

En virtud de la prop. 3.7, se puede decir que K es compacto si, y sólo si, para cada familia $(F_t)_{t\in I}$ de conjuntos $F_t \subset K$ cerrados relativos a K, tal que $\bigcap_{t \in I} F_t = \emptyset$, existe una subfamilia finita $F_{t_1}, \ldots,$ F_{t_m} tal que $\bigcap_{k=1}^{m} F_{t_k} = \emptyset$.

Proposición 6.2. *Sea* K *un subconjunto de* $\mathbf{R}^p$. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) K *es compacto.*

(b) *Para cualquier sucesión* $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *de subconjuntos de* K, *abiertos relativos a* K, *que verifican* $A_n \subset A_{n+1}$ *para* $n \in \mathbf{N}$ *y* $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n = K$, *existe un índice* $s \in \mathbf{N}$ *tal que* $A_s = K$.

(c) *Para cualquier sucesión* $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *de subconjuntos de* K, *cerrados relativos a* K, *que verifican* $F_n \supset F_{n+1}$ *para* $n \in \mathbf{N}$ *y* $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} F_n = \emptyset$, *existe un índice* $s \in \mathbf{N}$ *tal que* $F_s = \emptyset$.

Demostración. Se demuestra, exactamente como en el capítulo primero, que (a) implica (b) y (c), y que (b) y (c) son equivalentes. Demostremos ahora que (b) implica (a).

Supóngase que (b) sea cierto, y sea $(A_t)_{t\in I}$ un recubrimiento de K con conjuntos $A_t \subset K$ abiertos relativos a K. Además, sea t un índice fijo, y x un punto de A_t. Puesto que A_t es abierto relativo a K, existe un número entero $k \geqq 1$ tal que $B_{1/k}(x) \cap K \subset A_t$. En virtud del ejemplo 4.1, existe un punto $y \in \mathbf{Q}^p$ tal que $d(x, y) < \frac{1}{2k}$ y, por consiguiente, $x \in 0_{1/2k}(y) \cap K \subset A$.

Ahora, los conjuntos $0_{1/2k}(y) \cap K$, donde $y \in \mathbf{Q}^p$, $k \in \mathbf{N}$, y $k \geqq 1$, que están contenidos en algún conjunto A_t, forman una colección enumerable, ya que $\mathbf{Q}^p$ y $\mathbf{N}$ son conjuntos enumerables. Desde luego es posible ordenarlos en una sucesión que llamaremos (B_n). Los conjuntos B_n son abiertos relativos a K (prop. 3.2). Por hipótesis, cada punto $x \in K$ está contenido en algún conjunto A_t y se acaba de ver que cada punto de A_t está contenido en algún B_n; por lo tanto (B_n) es un recubrimiento de K. Si para cada $n \in \mathbf{N}$ se pone $C_n = \bigcup_{k=0}^{n} B_k$, entonces (C_n) es un recubrimiento de K, los conjuntos C_n son abiertos relativos a K (prop. 3.3 (iii)) y se cumple $C_n \subset C_{n+1}$ para $n \in \mathbf{N}$. Por hipótesis, existe un índice $s \in \mathbf{N}$ tal que $C_s = K$, es decir, $\bigcup_{k=0}^{s} B_k = K$. Si a cada índice k, donde $0 \leqq k \leqq s$, hacemos corresponder un conjunto A_{t_k} que contenga a B_k, entonces la familia $(A_{t_k})_{0 \leqq k \leqq s}$ cubre K, lo que demuestra que K es compacto. ◇

Proposición 6.3. *Un subconjunto* K *de* $\mathbf{R}^p$ *es compacto si, y sólo si, para cada sucesión* (x_n) *de puntos* $x_n \in K$ *existe una subsucesión* (x_{n_k}) *que converge hacia un punto de* K.

Un conjunto M del espacio numérico $\mathbf{R}^p$ se dice *acotado* si está contenido en una bola. Se puede suponer, además, que el centro de la bola es el origen. En efecto, si $M \subset B_\rho(x)$, entonces $M \subset$ $\subset B_{\rho+|x|}(0)$, ya que de $d(x, y) \leqq \rho$ se sigue $d(0, y) \leqq d(0, x) + d(x, y) \leqq$ $|x| + \rho$.

Un conjunto $M \subset \mathbf{R}^p$ es acotado si, y sólo si, para cada entero j, donde $1 \leqq j \leqq p$, existen dos números reales a_j y b_j tales que $a_j \leqq x_j \leqq b_j$ para todo punto $x = (x_1, \ldots, x_p) \in M$. En efecto, si dicha condición se cumple, sea $c_j = \max(|a_j|, |b_j|)$. Entonces se tiene $-c_j \leqq x_j \leqq c_j$ para cada $x = (x_1, \ldots, x_p) \in M$, y por lo tanto, $M \subset B_\rho(0)$, donde $\rho^2 = c_1^2 + \ldots + c_p^2$. Inversamente, si $M \subset B_\rho(0)$, entonces $-\rho \leqq x_j \leqq \rho$ para $x = (x_1, \ldots, x_p) \in M$ y $1 \leqq j \leqq p$.

Proposición 6.4. *Un subconjunto* K *de* $\mathbf{R}^p$ *es compacto si, y sólo si, es acotado y cerrado.*

Demostración. Sea K un subconjunto acotado y cerrado de $\mathbf{R}^p$, y (x_n) una sucesión de puntos $x_n = (x_1^{(n)}, \ldots, x_p^{(n)}) \in K$. Para cada j con $1 \leqq j \leqq p$ existen dos números reales a_j y b_j tales que $a_j \leqq$ $\leqq x_j^{(n)} \leqq b_j$ para $n \in \mathbf{N}$. En virtud de la prop. 1.6.4 se puede escoger una subsucesión $(x_{n'_k})$ de (x_n) tal que $x_1^{(n'_k)}$ converge hacia un límite $y_1 \in [a_1, b_1]$ cuando $k \to \infty$. Luego, de $(x_{n'_k})$ se puede escoger una subsucesión $(x_{n''_k})$ tal que $x_2^{(n''_k)}$ converge hacia un número $y_2 \in$ $\in [a_2, b_2]$ cuando $k \to \infty$.

Continuando de esta manera se llega al cabo de p pasos a una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) tal que, para cada j, donde $1 \leqq j \leqq$ $\leqq p$, la sucesión $(x_j^{(n_k)})$ de números reales converge hacia un número real y_j. Designemos por y el punto $(y_1, \ldots, y_p)$ de $\mathbf{R}^p$ y sea ε un número >0. Para cada j con $1 \leqq j \leqq p$ existe un $N_j \in \mathbf{N}$ tal que $|y_j - x_j^{(n_k)}| \leqq \frac{\varepsilon}{\sqrt{p}}$, si $k \geqq N_j$. Si N es el mayor de los números $N_1, \ldots, N_p$, se tiene $d(y, x_{n_k}) = [(y_1 - x_1^{(n_k)})^2 + \ldots + (y_p - x_p^{(n_k)})^2]^{\frac{1}{2}} \leqq$ $\leqq [\frac{\varepsilon^2}{p} + \ldots + \frac{\varepsilon^2}{p}]^{\frac{1}{2}} = \varepsilon$ para $k \geqq N$. Por consiguiente, la sucesión (x_{n_k}) converge hacia el punto $y \in \mathbf{R}^p$. En virtud de la prop. 4.2 y de la hipótesis según la cual K es cerrado, resulta que $y \in K$ y, por lo tanto, K es compacto.

Inversamente, supóngase que K sea compacto. Sea x un punto adherente a K. En virtud de la prop. 4.2, existe una sucesión de puntos $x_n \in K$ que converge hacia x. Por otra parte, existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) que converge hacia un punto de K (prop.

6.3). Puesto que cada subsucesión de una sucesión convergente converge hacia el mismo límite, resulta que $x \in$ K, es decir, K es cerrado (def. 2.9).

Finalmente, es claro que las bolas abiertas $0_n(0)$, con $n \in \mathbf{N}$, $n \geqq 1$ cubren a K. En virtud de la prop. 6.2 (b), existe un $s \in \mathbf{N}$ tal que $K \subset 0_s(0)$ y, por lo tanto, K es acotado. ◊

Ejemplo 6.1. Toda bola cerrada en $\mathbf{R}^p$ es un conjunto compacto.

Ejemplo 6.2. Para cada número entero j con $1 \leqq j \leqq p$, sean a_j y b_j dos números reales tales que $a_j \leqq b_j$. Entonces, el conjunto $P[a, b]$ de todos los puntos $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbf{R}^p$ que verifican $a_j \leqq x_j \leqq b_j$ para $1 \leqq j \leqq p$ es compacto. En efecto, se ha visto más arriba que es acotado, y se deja al lector como ejercicio demostrar que es cerrado.

Proposición 6.5. *Sea f una función continua definida en un subconjunto compacto* K *de* $\mathbf{R}^p$, *y con valores en* $\mathbf{R}^q$. *Entonces el conjunto* $f(K)$ *es compacto.*

Sea f una función definida sobre un conjunto X cualquiera y con valores en $\mathbf{R}^q$. Se dice que la función f es acotada si el conjunto $f(X)$ de sus valores es un conjunto acotado en $\mathbf{R}^q$.

Teorema 6.1. *Toda función continua, definida sobre un subconjunto compacto* K *de* $\mathbf{R}^p$ *y con valores en* $\mathbf{R}^q$ *es acotada.*

Teorema 6.2. *Sea f una función continua, definida en un conjunto compacto* K *de* $\mathbf{R}^p$ *y con valores en la recta real* $\mathbf{R}$. *Entonces existe un punto* $\xi \in K$ *tal que* $f(\xi) \geqq f(x)$ *para todo* $x \in K$, *y un punto* $\eta \in K$ *tal que* $f(\eta) \leqq f(x)$ *para todo* $x \in K$.

Definición 6.2. *Una función f definida en un subconjunto* X *de* $\mathbf{R}^p$ *y con valores en* $\mathbf{R}^q$ *es uniformemente continua si para cada número* $\epsilon > 0$ *existe un número* $\delta > 0$ *tal que las condiciones* $x \in X$, $y \in X$ *y* $d(x, y) \leqq \delta$ *implican* $d(f(x), f(y)) \leqq \epsilon$.

Otra vez resulta de la prop. 5.2 que una función uniformemente continua es continua (def. 5.2).

Teorema 6.3. *Toda función continua definida sobre un conjunto compacto de* $\mathbf{R}^p$ *y con valores en* $\mathbf{R}^q$ *es uniformemente continua.*

Demostración. Sea K un conjunto compacto en $\mathbf{R}^p$ y $f : K \to \mathbf{R}^q$ una función continua. Dado $\epsilon > 0$, para cada $x \in K$ existe $\delta(x) > 0$

tal que $y \in B_{2\delta(x)}(x) \cap K$ implica $d(f(x), f(y)) \leqq \frac{1}{2}\epsilon$ (prop. 5.2). Las bolas abiertas $O_{\delta(x)}(x)$ cubren K y por consiguiente existe un número finito de puntos $x_1, \ldots, x_m$ tales que las bolas $O_{\delta(x_k)}(x_k)$, con $1 \leqq k \leqq m$ cubren K. Sea $\delta > 0$ el menor de los números $\delta(x_k)$, donde $1 \leqq k \leqq m$.

Sean x, y dos puntos de K tales que $d(x, y) \leqq \delta$. Existe un punto x_k tal que $x \in O_{\delta(x_k)}(x_k)$, es decir $d(x_k, x) < \delta(x_k)$, y por lo tanto $d(x_k, y) \leqq d(x_k, x) + d(x, y) < \delta(x_k) + \delta \leqq 2\delta(x_k)$, es decir, $y \in B_{2\delta(x_k)}(x_k)$. Por consiguiente se tiene $d(f(x_k), f(x)) \leqq \frac{1}{2}\epsilon$, $d(f(x_k), f(y)) \leqq \frac{1}{2}\epsilon$, de donde resulta $d(f(x), f(y)) \leqq d(f(x), f(x_k)) + d(f(x_k), f(y)) \leqq \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$. ◇

Ejercicios

1) Demuéstrese la prop. 6.1, la primera parte de la prop. 6.2, las proposiciones 6.3 y 6.5 y los teoremas 6.1 y 6.2.

2) Demuéstrese que el conjunto $P[a, b]$ definido en el ejemplo 6.2 es cerrado.

3) Generalícese el ejercicio 2) del capítulo primero, § 6, al caso de un subconjunto X de $\mathbf{R}^p$.

3

ESPACIOS METRICOS

§1. Definición de los Espacios Métricos

Definición 1.1. *Una métrica sobre un conjunto* E *es una función que a cada pareja de elementos* $x, y \in E$ *hace corresponder un número real positivo* $d(x, y)$, *y que tiene las propiedades siguientes:*

(M1) $d(x, y) = 0$ *si, y sólo si,* $x = y$.

(M2) *Para cada pareja* $x, y \in E$, *se tiene* $d(x, y) = d(y, x)$.

(M3) *Para toda terna* $x, y, z \in E$, *se tiene* $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdad del triángulo).

Un conjunto provisto de una métrica se llama espacio métrico, sus elementos se llaman puntos y el valor $d(x, y)$ *se llama la distancia de los puntos* x *e* y.

Ejemplo 1.1. Se sigue de la prop. **2.**1.7 que la distancia $d(x, y) = |x - y|$ define una métrica sobre $\mathbf{R}^p$.

Ejemplo 1.2. Sea K un subconjunto compacto de $\mathbf{R}^p$ y denótese por $\mathcal{C}(K) = \mathcal{C}(K; \mathbf{R}^q)$ el conjunto de todas las funciones continuas definidas sobre K y con valores en $\mathbf{R}^q$. Del corolario 1 del teorema **2.**5.3 resulta que si $f \in \mathcal{C}(K)$ y $g \in \mathcal{C}(K)$, entonces $f + g \in \mathcal{C}(K)$. Del corolario 2 del teorema **2.**5.4 y de la prop. **2.**5.4 resulta que si $\alpha \in \mathbf{R}$ y $f \in \mathcal{C}(K)$, entonces la función $\alpha f : x \mapsto \alpha f(x)$ pertenece a $\mathcal{C}(K)$. Es fácil verificar que las dos operaciones algebraicas $(f, g) \mapsto f + g$ y $(\alpha, f) \mapsto \alpha f$ satisfacen las condiciones (EV1)-(EV8) del cap. segundo, § 1, es decir $\mathcal{C}(K)$ es un espacio vectorial.

Combinando el ejercicio **2.**5.4 con la prop. **2.**5.4 se ve que, para cada $f \in \mathcal{C}(K)$, la función $|f| : x \mapsto |f(x)|$, con valores en $\mathbf{R}$, es continua y entonces alcanza su máximo $\max_{x \in K} |f(x)|$ en virtud del teorema **2.**6.2. Este máximo se llama la norma de f y se denota por $\|f\|$. La función $f \mapsto \|f\|$ definida sobre $\mathcal{C}(K)$, y con valores en el conjunto $\mathbf{R}_+$ de los números reales positivos, tiene las propiedades siguientes (análogas a las de la norma de un vector de $\mathbf{R}^p$, enumeradas en la prop. 2.1.6):

(N1) $\|f\| = 0$ si, y sólo si, $f(x) = 0$, para todo $x \in \mathrm{K}$.

(N2) Para todo escalar $\alpha \in \mathbf{R}$ y toda función $f \in \mathcal{C}(\mathrm{K})$ se tiene $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$.

(N3) Para toda pareja f, g de funciones en $\mathcal{C}(\mathrm{K})$ se tiene $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

En efecto, si $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathrm{K}$, entonces $|f(x)| = 0$ para todo $x \in \mathrm{K}$, y por lo tanto, $\|f\| = \max_{x \in \mathrm{K}} |f(x)| = 0$. Inversamente, si $\|f\| = 0$, entonces de la desigualdad $0 \leq f(x) \leq \|f\|$ resulta que $|f(x)| = 0$ para todo $x \in \mathrm{K}$, es decir, $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathrm{K}$. Esto demuestra (N1).

Luego sea $\xi \in \mathrm{K}$ tal que $\|f\| = |f(\xi)|$. Entonces $|f(\xi)| \geq |f(x)|$ para todo $x \in \mathrm{K}$, y por lo tanto, $|\alpha| \cdot \|f\| = |\alpha f(\xi)| \geq |\alpha f(x)|$ para todo $x \in \mathrm{K}$, es decir, $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$.

70

Finalmente, para todo $x \in \mathrm{K}$ se tiene $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|$ y, por lo tanto, $\|f + g\| = \max_{x \in \mathrm{K}} |f(x) + g(x)| \leq \|f\| + \|g\|$.

Ahora llegamos a la definición de la distancia en el espacio $\mathcal{C}(\mathrm{K})$, la cual es muy semejante a la definición de la distancia en $\mathbf{R}^p$ (def. 2.1.2): para $f, g \in \mathcal{C}(\mathrm{K})$ se pone $d(f, g) = \|f - g\|$. La verificación de los axiomas (M1)-(M3) se hace como en la prop. 2.1.7. La relación $d(f, g) = \|f - g\| = 0$ significa que $f(x) - g(x) = 0$ para todo $x \in \mathrm{K}$, es decir que $f = g$. Puesto que $f - g = (-1)(g - f)$, en virtud de (N2) se tiene $d(f, g) = \|f - g\| = \|(-1)(g - f)\| = |-1| \cdot \|g - f\| = d(g, f)$. Finalmente, de la identidad $f - h = (f - g) + (g - h)$ y de (N3) resulta que $d(f, h) = \|f - h\| \leq \|f - g\| + \|g - h\| = d(f, g) + d(g, h)$ para $f, g, h \in \mathcal{C}(\mathrm{K})$.

Ejemplo 1.3. Sea l^2 el conjunto de todas las sucesiones $\xi = (\xi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de números reales tales que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n^2$ con términos positivos es convergente. La expresión $\|\xi\| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$ se llama norma de ξ. Está claro que $\|\xi\| = 0$ si, y sólo si, $\xi_n = 0$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Además, si para $\alpha \in \mathbf{R}$ y $\xi \in l^2$ llamamos $\alpha\xi$ a la sucesión $(\alpha\xi_n)$, entonces se tiene $\|\alpha\xi\| = |\alpha| \cdot \|\xi\|$. Así se ha demostrado que la norma satisface las condiciones (N1) y (N2) (prop. 2.1.6).

Si ξ y η son dos sucesiones pertenecientes a l^2, sea $\xi + \eta$ la sucesión $(\xi_n + \eta_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Queremos demostrar que $\xi + \eta \in l^2$ y que $\|\xi + \eta\| \leq \|\xi\| + \|\eta\|$, es decir que la norma tiene también la propiedad (N3). En virtud de la desigualdad del triángulo para los espacios $\mathbf{R}^p$ tenemos, para cada $p \in \mathbf{N}$,

$$\left\{\sum_{n=0}^{p} (\xi_n + \eta_n)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{n=0}^{p} \xi_n^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=0}^{p} \eta_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

y con más razón

$$\left\{\sum_{n=0}^{p} (\xi_n + \eta_n)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Es una consecuencia inmediata del teorema 1.4.1 que una serie con términos positivos es convergente si, y sólo si, la sucesión de sus sumas parciales es acotada, y que entonces su suma es el extremo superior de las sumas parciales. Por lo tanto, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (\xi_n + \eta_n)^2$ es convergente, es decir $\xi + \eta$ pertenece a l^2, y se tiene

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty} (\xi_n + \eta_n)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

que equivale a la desigualdad (N3) que se quería demostrar.

La definición de la distancia de dos elementos $\xi \in l^2$ y $\eta \in l^2$ es otra vez la misma que en los ejemplos anteriores, a saber $d(\xi, \eta) = \|\xi - \eta\|$. Se puede dejar al lector el deducir las propiedades (M1)-(M3) de la distancia a partir de las propiedades (N1)-(N3) de la norma.

Se verifica muy fácilmente que las dos operaciones algebraicas $(\xi, \eta) \mapsto \xi + \eta$ y $(\alpha, \xi) \mapsto \alpha\xi$ satisfacen los axiomas (EV1)-(EV8) del cap. segundo, § 1, es decir, que l^2 es un espacio vectorial. Fue Erhardt Schmidt quien introdujo en 1908 el espacio vectorial l^2, con la métrica definida aquí, bajo el nombre de "espacio de Hilbert".

Ejemplo 1.4. Sea p un número primo. Se demuestra al principio de todo curso sobre la teoría de números que todo número racional $r \in \mathbf{Q}$ distinto de cero se puede escribir en la forma $r = \frac{m}{n} p^s$, donde p no divide los números enteros m y n, $n > 0$, y s es un número entero definido de una manera unívoca por r. El valor absoluto p-ádico de un número racional $r \neq 0$ se define entonces por $|r|_p = p^{-s}$, y se completa la definición poniendo $|0|_p = 0$. Está claro de esta definición que, para todo $r \in \mathbf{Q}$, el valor $|r|_p$ es un número real positivo y que $|r|_p = 0$ si, y sólo si, $r = 0$. Sean $q = \frac{m}{n}p^s$ y $r = \frac{m'}{n'}p^t$ dos números racionales $\neq 0$ y sea, por ejemplo, $s \geqq t$, es decir, $|q|_p \leqq |r|_p$. Entonces se puede escribir $q + r = \frac{mn'p^{s-t} + m'n}{nn'}p^t$, y por lo tanto, $|q + r|_p \leqq p^{-t}$, es decir,

$$(1) \qquad |q + r|_p \leqq \max(|q|_p, |r|_p).$$

Por otra parte $qr = \frac{mm'}{nn'}p^{s+t}$, de donde resulta que $|qr|_p = |q|_p \cdot |r|_p$.

La distancia correspondiente al valor absoluto p-ádico se define, de manera análoga a los casos anteriores, por $d(q, r) = |q - r|_p$ para todo $q, r \in \mathbf{Q}$. Es evidente que esta distancia cumple la condición (M1), y de la relación $|-1|_p = 1$ resulta que $d(q, r) = |q - r|_p = |(-1)(r - q)|_p = |-1|_p \cdot |r - q|_p = d(r, q)$, es decir, la condición (M2). En vez de la propiedad (M3) tenemos una desigualdad más fuerte, a saber

$$(2) \qquad d(r_1, r_3) \leqq \max(d(r_1, r_2), d(r_2, r_3))$$

para cualquier terna de números racionales r_1, r_2, r_3. La desigualdad (2) resulta inmediatamente de la identidad $r_1 - r_3 = (r_1 - r_2) + (r_2 - r_3)$ y de la desigualdad (1).

Un espacio métrico E tal que la distancia satisface para toda terna $x, y, z \in$ E en vez de (M3), la desigualdad más fuerte

$$(\mathrm{UM}) \qquad d(x, z) \leqq \max(d(x, y), d(y, z))$$

se llama espacio *ultramétrico*, y (UM) se llama la desigualdad ultramétrica. Se acaba de ver que $\mathbf{Q}$ provisto de la métrica p-ádica es un espacio ultramétrico.

Ejercicios

1) Demuéstrese que para dos funciones f y g que pertenecen a $\mathcal{C}$(K) (ejem. 1.2) se tiene $\|fg\| \leqq \|f\| \cdot \|g\|$. Dése un ejemplo donde $\|fg\| \neq \|f\| \cdot \|g\|$.

2) Demuéstrese que si dos números racionales q y r son tales que $|q|_p < |r|_p$, entonces se tiene $|q + r|_p = |r|_p$.

3) Demuéstrese que en un espacio ultramétrico cada triángulo es isósceles, es decir, dados tres puntos x, y, z, dos de los tres números $d(x, y), d(y, z), d(z, x)$ son iguales.

§ 2. Vecindades; Conjuntos Abiertos y Cerrados

Esta sección será muy breve ya que se advierte al lector que, con una sola excepción, no se han utilizado en la § 2 del cap. segundo más que las propiedades (M1)-(M3) de la métrica de $\mathbf{R}^p$, y por consiguiente, todas las definiciones y proposiciones con sus demostraciones respectivas se pueden repetir, palabra por palabra, reemplazando $\mathbf{R}^p$ por un espacio métrico cualquiera.

La excepción señalada arriba ocurre en el ejemplo 2.2.1 al demostrar que los puntos de $S_\rho(x)$ son los puntos frontera de la bola cerrada $B_\rho(x)$, y se utilizan muy esencialmente propiedades particulares del espacio $\mathbf{R}^p$. Esto no es accidental ya que la propiedad mencionada no es válida en un espacio métrico arbitrario. Más precisamente, se mostrará el hecho bastante sorprendente de que, en un espacio ultramétrico, los puntos de $S_\rho(x)$ son puntos interiores de $B_\rho(x)$. En efecto, sea y un punto de $S_\rho(x)$, y z un punto de $B_\rho(y)$. Entonces se tiene $d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z)) \leq \rho$, es decir, $z \in B_\rho(x)$. Por lo tanto, la vecindad $B_\rho(y)$ de y está contenida en $B_\rho(x)$, es decir, y es un punto interior de $B_\rho(x)$.

De esta manera una bola cerrada en un espacio ultramétrico es al mismo tiempo un conjunto cerrado y un conjunto abierto.

Ejercicios

1) Sea E un espacio ultramétrico, x un punto de E y ρ un número >0.

a) Demuéstrese que la bola abierta $0_\rho(x)$ es un conjunto abierto y cerrado.

b) Demuéstrese que para todo $y \in 0_\rho(x)$ se tiene $S_\rho(x) = S_\rho(y)$.

c) Demuéstrese que para todo $y \in B_\rho(x)$ se tiene $B_\rho(x) = B_\rho(y)$.

d) Demuéstrese que para todo $y \in 0_\rho(x)$ se tiene $0_\rho(x) = 0_\rho(y)$.

e) Demuéstrese que si dos bolas (abiertas o cerradas) tienen un punto en común, entonces una de ellas está contenida en la otra.

§ 3. Métrica Inducida

Sea E un espacio métrico y X un subconjunto de E. Denotemos por d la métrica sobre E. Hay una manera muy natural de definir una métrica d_X sobre el conjunto X: para cada pareja de puntos $x, y \in X$ se pone $d_X(x, y) = d(x, y)$. Es evidente que la función d_X

satisface los axiomas (M1)-(M3). De esta manera X se vuelve en un espacio métrico y d_X se llama la *métrica inducida* sobre X.

Sea x un punto de X y ρ un número >0. Se denota por $B_\rho^X(x)$ la bola cerrada $\{y \mid y \in X, d_X(x, y) \leq \rho\}$ de centro x y radio ρ en X provisto de la métrica inducida d_X. Está claro que $B_\rho^X(x)$ es la traza de la bola $B_\rho(x) = \{y \mid y \in E, d(x, y) \leq \rho\}$ sobre X, es decir, $B_\rho^X(x) = B_\rho(x) \cap X$.

Definamos una vecindad V de un punto $x \in X$ relativa a X como en la def. 1.3.1, a saber como el conjunto traza $V = U \cap X$ sobre X de una vecindad U de x en E. Entonces V es una vecindad de x relativa a X si, y sólo si, es una vecindad de x en el espacio métrico X provisto de la métrica inducida. En efecto, si $V = U \cap X$, donde $U \supset B_\rho(x)$, entonces $V \supset B_\rho^X(x)$. Inversamente, si V es un subconjunto de X que contiene una bola cerrada $B_\rho^X(x)$ con $\rho > 0$, entonces $U = V \cup B_\rho(x)$ es una vecindad de x en E, y se tiene $U \cap X = (V \cup B_\rho(x)) \cap X = (V \cap X) \cup (B_\rho(x) \cap X) = V \cup B_\rho^X(x) = V$.

De aquí sigue que si se definen los puntos interiores y adherentes relativos a X, los conjuntos abiertos relativos a X, los conjuntos cerrados relativos a X, etc., como en la § 3 del cap. primero, entonces todos los resultados de la § 2 sobre vecindades, conjuntos abiertos, conjuntos cerrados, etc., son automáticamente ciertos para vecindades relativas a X, conjuntos abiertos relativos a X, conjuntos cerrados relativos a X, etc., y no se necesita demostración alguna. Nos referimos, en particular, a las proposiciones 3.1, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.8 y 3.9 del cap. primero.

Por otra parte, los resultados análogos a las proposiciones 1.3.2 y 1.3.7 y sus corolarios, que relacionan los conjuntos abiertos y cerrados de X y E, se demuestran exactamente como en el primer capítulo. Podemos dejar los detalles a cargo del lector.

§ 4. Sucesiones Convergentes

En esta sección se consideran sucesiones $(x_n)_{n \in N}$ cuyos términos x_n son puntos de un espacio métrico E. El lector se dará cuenta sin dificultad de que la definición de una sucesión convergente (def. 2.4.1) y las proposiciones 4.1 y 4.2 del cap. segundo subsisten sin cambio si se reemplaza en ellas el espacio numérico $\mathbf{R}^p$ por un espacio métrico cualquiera E.

En razón de su importancia para lo que sigue se reitera del cap. segundo la siguiente definición.

Definición 4.2. *Una sucesión (x_n) de puntos de* E *es una sucesión de Cauchy si para cada número estrictamente positivo* ε *existe un número entero positivo* $N(\varepsilon)$ *tal que* $d(x_n, x_m) \leqq \epsilon$ *para toda pareja* (n, m) *de números enteros que verifican las condiciones* $n \geqq N(\varepsilon)$ *y* $m \geqq N(\epsilon)$.

Se ve palabra por palabra como en el segundo capítulo que cada sucesión convergente es una sucesión de Cauchy. El recíproco, sin embargo, no es necesariamente cierto para todo espacio métrico, y esto conduce a la definición siguiente:

Definición 4.3. *Se dice que un espacio métrico* E *es completo si cada sucesión de Cauchy de puntos de* E *converge hacia un punto de* E.

Ejemplo 4.1. En virtud del teorema 2.4.1, el espacio métrico $\mathbf{R}^p$ es completo.

Ejemplo 4.2. El conjunto $\mathbf{Q}$ de los números racionales se convierte en un espacio métrico si la distancia de dos números racionales q y r se define por $d(q, r) = |q - r|$. En realidad, la métrica así obtenida es la métrica inducida por la de la recta real $\mathbf{R}$.

Observemos ahora el hecho muy conocido de que no existe número racional cuyo cuadrado sea 2. En efecto, supóngase que $r \in \mathbf{Q}$ es tal que $r^2 = 2$, y escríbase r en la forma $\frac{m}{n}$, donde m y n son dos números enteros sin divisor común. Entonces de la relación $m^2 = 2n^2$ se sigue que m es divisible por 2, es decir, $m = 2m'$. Reemplazando m por $2m'$ en la ecuación anterior se obtiene $2m'^2 = n^2$, de donde resulta que n también tiene que ser divisible por 2, en contradicción con la hipótesis de que m y n no tienen divisor común. Esta contradicción demuestra que no puede existir número racional cuyo cuadrado sea 2.

Definamos ahora la sucesión (r_n) de números racionales poniendo $r_0 = 2$ y $r_{n+1} = \frac{1}{2}(r_n + \frac{2}{r_n})$ para $n \in \mathbf{N}$. Para todo $n \in \mathbf{N}$ se tiene $r_n^2 > 2$, ya que

$$r_{n+1}^2 = \frac{1}{4}(r_n + \frac{2}{r_n})^2 = \frac{1}{4}(r_n - \frac{2}{r_n})^2 + 2 > 2$$

como la expresión $r_n - \frac{2}{r_n}$ no puede ser igual a cero. De aquí se sigue que $r_{n+1} < r_n$ para todo $n \in \mathbf{N}$, puesto que $r_{n+1} = \frac{1}{2}(r_n + \frac{2}{r_n}) < \frac{1}{2}(r_n + \frac{r_n^2}{r_n}) = r_n$. De estas propiedades resulta fácilmente que

(r_n) es una sucesión de Cauchy. Si (r_n) tuviera un límite en $\mathbf{Q}$, este límite r satisfaría la relación $r = \frac{1}{2}(r + \frac{2}{r})$ (cf. ejercicio 4 del cap. primero, § 4), es decir $r^2 = 2$, que es imposible. Se ha demostrado pues que $\mathbf{Q}$ no es un espacio métrico completo.

Ejemplo 4.3. Sea K un subconjunto compacto de $\mathbf{R}^p$, y $\mathcal{C}(K) = \mathcal{C}(K;\mathbf{R}^q)$ el espacio métrico introducido en el ejemplo 1.2. Demostraremos que $\mathcal{C}(K)$ es completo. Sea (f_n) una sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}(K)$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe un número entero positivo $N(\varepsilon)$ tal que

$$\|f_n - f_m\| = \max_{x \in K} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$$

si $n, m \geq N(\varepsilon)$. En particular, para cada $x \in K$ se tiene $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$ si $n, m \geq N(\varepsilon)$, es decir la sucesión $(f_n(x))_{n \in N}$ de vectores de $\mathbf{R}^q$ es una sucesión de Cauchy y en virtud del teorema **2.4.1** tiene un límite $f(x) \in \mathbf{R}^q$. Falta demostrar que la función $f: x \mapsto f(x)$ pertenece a $\mathcal{C}(K)$ y que (f_n) converge hacia f en $\mathcal{C}(K)$.

En primer lugar demostremos que para cada $\varepsilon > 0$ existe un número entero $N_1(\varepsilon)$ tal que

$$(1) \qquad |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \quad \text{si} \quad x \in K \ \text{ y } \ n \geq N_1(\varepsilon).$$

En efecto, se tiene $|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $x \in K$ y $n, m \geq N(\frac{\varepsilon}{2})$. Por otra parte, para cada $x \in K$ existe un número $N_2(x, \varepsilon)$ tal que $|f(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, si $m \geq N_2(x;\varepsilon)$. Pongamos $N_1(\varepsilon) = N(\frac{\varepsilon}{2})$. Si para $x \in K$ se escoge m mayor que $N(\frac{\varepsilon}{2})$ y $N_2(x, \varepsilon)$, se obtiene

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

para $n \geq N_1(\varepsilon)$, es decir, se cumple (1).

Adoptemos la terminología siguiente: Sea $(g_n)_{n \in N}$ una sucesión de funciones definidas sobre un subconjunto X de $\mathbf{R}^p$ con valores en $\mathbf{R}^q$. Se dice que (g_n) converge uniformemente sobre X hacia la función $g: X \to \mathbf{R}^q$ si para cada número $\varepsilon > 0$ existe un número entero positivo $N_1(\varepsilon)$, independiente de $x \in X$, tal que $d(g(x), g_n(x)) \leq \varepsilon$, para todo $x \in X$ y $n \geq N_1(\varepsilon)$. De esta manera, (1) significa que (f_n) converge uniformemente hacia f.

La continuidad de f se deduce entonces de la proposición siguiente: Sea (g_n) una sucesión de funciones continuas definidas en un subconjunto X de $\mathbf{R}^p$, con valores en $\mathbf{R}^q$, que converge uniformemente sobre X hacia la función $g: X \to \mathbf{R}^q$. Entonces la función g es continua. Para demostrarlo, sea ε un número >0 y x un punto de X. Existe un índice n tal que $d(g(y), g_n(y)) \leqq \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $y \in$ $\in X$, y puesto que g_n es continua existe un número $\delta > 0$ tal que $d(g_n(x), g_n(y)) \leqq \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $y \in X$ tal que $d(x, y) \leqq \delta$ (prop. **2**. 5. 2). Por consiguiente, para $y \in X$ tal que $d(x, y) \leqq \delta$ se tiene

$$d(g(x), g(y)) \leqq d(g(x), g_n(x)) + d(g_n(x), g_n(y)) + d(g_n(y), g(y)) \leqq$$

$$\leqq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

es decir, g es continua en x (prop. **2**. 5. 2).

Finalmente, (1) equivale a

$$d(f, f_n) = \|f - f_n\| \leqq \varepsilon \quad \text{si} \quad n \geqq N_1(\varepsilon),$$

es decir, (f_n) converge hacia f en el espacio métrico $\mathcal{C}(K)$. Así queda demostrado que $\mathcal{C}(K)$ es completo y al mismo tiempo se ve que la convergencia en $\mathcal{C}(K)$ equivale a la convergencia uniforme sobre K.

Ejemplo 4. 4. El "espacio de Hilbert" l^2 del ejemplo 1. 3 es completo. En efecto, sea $(\xi^{(k)})_{k \in N}$ una sucesión de Cauchy de elementos de l^2, donde cada $\xi^{(k)}$ es una sucesión $(\xi_n^{(k)})_{n \in N}$ con $\sum_{n=0}^{\infty} (\xi_n^{(k)})^2$ convergente. Para cada $\varepsilon > 0$ existe un número entero positivo $N(\varepsilon)$ tal que

$$\|\xi^{(k)} - \xi^{(j)}\| = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (\xi_n^{(k)} - \xi_n^{(j)})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leqq \varepsilon$$

y con más razón

$$|\xi_n^{(k)} - \xi_n^{(j)}| \leqq \varepsilon$$

para $k, j \geqq N(\varepsilon)$, cualquiera que sea $n \in \mathbf{N}$. Así $(\xi_n^{(k)})_{k \in N}$ es una sucesión de Cauchy de números reales y en virtud del teorema **1**. 4. 2 converge hacia un número $\xi_n \in \mathbf{R}$. Sea ξ la sucesión $(\xi_n)_{n \in N}$. Falta demostrar que ξ pertenece a l^2 y que $(\xi^{(k)})$ converge hacia ξ en l^2.

Dado $\varepsilon > 0$, para cada $p \in \mathbf{N}$ se tiene

$$\left\{ \sum_{n=0}^{p} (\xi_n^{(j)} - \xi_n^{(k)})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leqq \|\xi^{(j)} - \xi^{(k)}\| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$$

si $k, j \geq N(\frac{\varepsilon}{2})$. Por otra parte, para cada p existe un número $N_2(p, \epsilon)$ tal que $|\xi_n - \xi_n^{(j)}| \leq \frac{\epsilon}{2\sqrt{p+1}}$ para $0 \leq n \leq p$ si $j \geq N_2(p, \epsilon)$, es decir

$$\left\{ \sum_{n=0}^{p} (\xi_n - \xi_n^{(j)})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\epsilon}{2}$$

si $j \geq N_2(p, \epsilon)$. Si, dado $p \in \mathbf{N}$, se toma j mayor que $N(\frac{\varepsilon}{2})$ y que $N_2(p, \epsilon)$, se obtiene, en virtud de la desigualdad del triángulo en los espacios $\mathbf{R}^p$, que

$$(2) \quad \left\{ \sum_{n=0}^{p} (\xi_n - \xi_n^{(k)})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left\{ \sum_{n=0}^{p} (\xi_n - \xi_n^{(j)})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \sum_{n=0}^{p} (\xi_n^{(j)} - \xi_n^{(k)})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

si $k \geq N(\frac{\varepsilon}{2})$. De aquí resulta, utilizando otra vez la desigualdad del triángulo, que

$$\left\{ \sum_{n=0}^{p} \xi_n^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left\{ \sum_{n=0}^{p} (\xi_n - \xi_n^{(k)})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \sum_{n=0}^{p} (\xi_n^{(k)})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon + \|\xi^{(k)}\|$$

para todo p, si k es un índice fijo mayor que $N(\frac{\varepsilon}{2})$. Así la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n^2$ converge, y ξ pertenece al espacio l^2. Luego, de (2) resulta que

$$\|\xi - \xi^{(k)}\| = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (\xi_n - \xi_n^{(k)})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon$$

si $k \geq N(\frac{\varepsilon}{2})$, es decir, $\xi = \lim_{k \to \infty} \xi^{(k)}$.

El resultado principal de esta sección será que cada espacio métrico se puede "inmergir" en un espacio métrico completo exactamente como $\mathbf{Q}$ está inmerso en $\mathbf{R}$. Antes de poder enunciar este resultado con precisión es necesario introducir algunos conceptos auxiliares.

En primer lugar se puede generalizar la def. 4.3 del cap. segundo de la manera siguiente:

Definición 4.4. *Un subconjunto* D *de un espacio métrico* E *es denso en* E *si la adherencia* $\bar{\mathrm{D}}$ *de* D *es igual a* E.

Definición 4.6. *Se dice que un espacio métrico* E *es de tipo enumerable si existe una sucesión* $(0_n)_{n\in N}$ *de subconjuntos abiertos de* E *tal que todo conjunto abierto* $A \subset E$ *sea la reunión de una subfamilia finita o infinita de* (0_n).

Se dice también que un espacio de tipo enumerable satisface el "segundo axioma de enumerabilidad". Se verá en el capítulo siguiente (§ 4) qué es lo que se entiende por el "primer axioma de enumerabilidad". Basta decir ahora que todo espacio métrico lo satisface.

Proposición 4.5. *Un espacio métrico es de tipo enumerable si, y sólo si, es separable.*

Demostración. Si E es un espacio métrico de tipo enumerable, sea $(0_n)_{n\in N}$ una sucesión de subconjuntos abiertos que satisface a la condición de la def. 4.6. Por supuesto, se puede suponer que ninguno de los conjuntos 0_n es vacío. Para cada $n \in \mathbf{N}$ sea x_n un punto de 0_n. Entonces el conjunto D de todos los puntos x_n es enumerable y D es denso en E, en virtud de la prop. 4.3, ya que todo conjunto abierto no vacío A contiene por lo menos un conjunto 0_n y, por lo tanto, un punto x_n.

Supóngase ahora que el espacio métrico E es separable, y sea $D = \{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ un conjunto enumerable denso en E. La colección de todas las bolas abiertas $0_{1/(m+1)}(x_n)$, donde n y m recorren $\mathbf{N}$, es un conjunto enumerable de conjuntos abiertos, y por lo tanto se puede ordenar en una sucesión. Se necesita todavía demostrar que, dado un conjunto abierto $A \neq \emptyset$ y un punto $x \in A$, existe un conjunto $0_{1/(m+1)}(x_n)$ tal que $x \in 0_{1/(m+1)}(x_n) \subset A$. Puesto que A es abierto, existe una bola $B_\rho(x)$ con $\rho > 0$ contenida en A. Sea m un número entero positivo tal que $\frac{1}{m+1} \leq \frac{\rho}{2}$, y x_n un punto de D tal que $d(x, x_n) < \frac{1}{m+1}$. Entonces $x \in 0_{1/(m+1)}(x_n)$. Por otra parte, si $y \in 0_{1/(m+1)}(x_n)$, se tiene $d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1} \leq \rho$, es decir, $0_{1/(m+1)}(x_n) \subset B_\rho(x)$ y, con más razón, $0_{1/(m+1)}(x_n) \subset A$. ◇

Definición 4.7. *Una aplicación* f *de un espacio métrico* X *sobre otro espacio métrico* Y *se llama una isometría si* $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ *para cada pareja de puntos* $x, y \in X$. *Se dice que dos espacios métricos son isométricos si existe una isometría de uno sobre el otro.*

Una isometría $f: X \to Y$ es siempre una aplicación inyectiva, ya que si $f(x) = f(y)$, entonces de $d(x, y) = d(f(x), f(y)) = 0$ se sigue $x = y$. Está claro que si $f: X \to Y$ es una isometría, entonces la aplicación inversa $f^{-1}: Y \to X$ también lo es.

En la demostración del teorema que sigue se necesita el concepto de la *relación de equivalencia,* uno de los más importantes de la teoría de conjuntos, que se recordará muy brevemente aquí. Sea X un conjunto cualquiera. Se llama relación de equivalencia sobre X todo subconjunto R del producto cartesiano $X \times X$ (cf. cap. segundo, § 5) que tiene las propiedades siguientes:

(a) Para cada $x \in X$ la pareja (x, x) pertenece a R (reflexividad).

(b) Si $(x, y) \in R$, entonces $(y, x) \in R$ (simetría).

(c) Si $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$, entonces $(x, z) \in R$ (transitividad).

Si $(x, y) \in R$ se suele decir que x es equivalente a y módulo R, y se escribe xRy ó $x \sim y$. Con esta última notación las propiedades mencionadas arriba se escriben:

(a') Para cada $x \in X$ se tiene $x \sim x$.

(b') Si $x \sim y$, entonces $y \sim x$.

(c') Si $x \sim y$ e $y \sim z$, entonces $x \sim z$.

Una relación de equivalencia R sobre el conjunto X define una partición de X, es decir, una familia $(P_t)_{t \in I}$ de subconjuntos de X, dos a dos sin elemento común, y cuya reunión es todo X. En efecto, si para cada x llamamos P_x al conjunto de todos los elementos equivalentes a x, entonces $x \in P_x$, en virtud de (a). Además si P_x y P_y tienen un elemento z en común, entonces de $z \sim x$ y $z \sim y$ resulta, en virtud de (b) y (c), que $x \sim y$. Luego, si $t \in$ $\in P_y$, entonces de $t \sim y$ e $y \sim x$ se sigue que $t \sim x$, es decir $t \in P_x$ y por lo tanto $P_y \subset P_x$. Se ve de la misma manera que $P_x \subset P_y$, lo que da, finalmente, $P_x = P_y$.

Cada conjunto P_t se llama una clase de equivalencia de X módulo R. Así, una clase de equivalencia es un subconjunto de X que consiste de todos los elementos de X que son equivalentes a un elemento cualquiera de la clase; además dos elementos arbitrarios de la clase son equivalentes. Se puede formar luego un nuevo conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia de X, que se llama el conjunto cociente de X módulo R, y se denota por X/R. La aplicación φ de X sobre X/R, que a cada elemento de X hace corresponder la clase de equivalencia a la cual pertenece, se llama la suprayección canónica. Si P es un elemento de X/R, cada elemento $x \in X$ tal que $\varphi(x) = P$ se llama un representante de P.

Cabe ahora enunciar el siguiente teorema.

Teorema 4.1. *Sea* E *un espacio métrico. Existe un espacio métrico completo* $\hat{E}$ *y una inyección* $j: E \to \hat{E}$ *tal que* j *sea una isometría de* E *sobre* $j(E)$ *y que* $j(E)$ *sea denso en* $\hat{E}$.

Demostración. Sea X el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy de puntos de E. Sobre el conjunto X se define una relación de equivalencia R de la manera siguiente: si (x_n) y (y_n) son dos sucesiones de Cauchy, se dirá que $(x_n) \sim (y_n)$ si la sucesión $(d(x_n, y_n))$ de números reales tiende hacia cero. Se cumplen las condiciones (a)-(c) que definen una relación de equivalencia. En efecto, $d(x_n, x_n) = 0$ y $d(x_n, y_n) = d(y_n, x_n)$ para todo n. Además, si $d(x_n, y_n) \leqq \frac{\epsilon}{2}$ y $d(y_n, z_n) \leqq \frac{\epsilon}{2}$ para $n \geqq N$, se tiene $d(x_n, z_n) \leqq \epsilon$ para $n \geqq N$.

El conjunto $\hat{E}$ será ahora el conjunto cociente X/R. Definimos una métrica $\hat{d}$ sobre $\hat{E}$ de la manera siguiente: dado dos elementos $\dot{x}$ e $\dot{y}$ de E, sea (x_n) un representante de $\dot{x}$ e (y_n) un representante de $\dot{y}$ en X, y pongamos

$$\hat{d}(\dot{x}, \dot{y}) = \lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n). \tag{3}$$

En primer lugar, hay que demostrar que el límite en el segundo miembro existe. Se tiene $d(x_n, y_n) \leqq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n)$, y por lo tanto

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leqq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m).$$

Puesto que (x_n) y (y_n) son sucesiones de Cauchy, esta desigualdad muestra que, para cualquier $\epsilon > 0$, existe $N(\epsilon)$ tal que $|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leqq \epsilon$, si $n, m \geqq N(\epsilon)$, es decir, $(d(x_n, y_n))$ es una sucesión de Cauchy en **R**. En virtud del teorema 1.4.2 resulta pues que la sucesión $(d(x_n, y_n))$ converge.

Demostremos ahora que el límite en (3) es independiente de la selección de los representantes de $\dot{x}$ e $\dot{y}$. En efecto, sea por ejemplo (x_n^1) otro representante de $\dot{x}$. Entonces de $d(x_n, y_n) \leqq d(x_n, x_n^1) + d(x_n^1, y_n)$ resulta

$$|d(x_n, y_n) - d(x_n^1, y_n)| \leqq d(x_n, x_n^1)$$

y, por lo tanto,

$$|\hat{d}(\dot{x}, \dot{y}) - d(x_n^1, y_n)| \leqq |\hat{d}(\dot{x}, \dot{y}) - d(x_n, y_n)| + d(x_n, x_n^1).$$

Puesto que $\hat{d}(\dot{x}, \dot{y})$ es el límite de $(d(x_n, y_n))$, y que (x_n) es equivalente a (x_n^1) módulo R, se ve de la última desigualdad que también $d(x_n^1, y_n)$ converge hacia $\hat{d}(\dot{x}, \dot{y})$.

La función $\hat{d}$ es una métrica sobre $\hat{E}$. En efecto, cada $d(x_n, y_n)$ es un número real positivo, y entonces se sigue del ejemplo 1.2.1 y de la prop. 1.4.2 que $\hat{d}(\dot{x}, \dot{y})$ también es un número real positivo. Si $\hat{d}(\dot{x}, \dot{y}) = 0$, entonces $(d(x_n, y_n))$ tiende hacia cero, es decir, $(x_n) \sim \sim (y_n)$ y por lo tanto $\dot{x} = \dot{y}$. Puesto que $d(x_n, y_n) = d(y_n, x_n)$ para todo $n \in N$, se tiene $\hat{d}(\dot{x}, \dot{y}) = \hat{d}(\dot{y}, \dot{x})$ (cf. ejercicio 1). Sean finalmente $\dot{x}$, $\dot{y}$ y $\dot{z}$ tres puntos de $\hat{E}$ y (x_n), (y_n), (z_n) sus representantes. Dado $\epsilon > 0$, existe $N(\epsilon)$ tal que

$$\hat{d}(\dot{x}, \dot{z}) - \epsilon \leqq d(x_n, z_n) \leqq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)$$

para $n \geqq N(\epsilon)$. Utilizando otra vez el ejemplo 1.2.1 y la prop. 1.4.2, y además el ejercicio 1.4.4, se obtiene

$$\hat{d}(\dot{x}, \dot{z}) - \epsilon \leqq \hat{d}(\dot{x}, \dot{y}) + \hat{d}(\dot{y}, \dot{z}).$$

Puesto que ϵ fue un número positivo arbitrario, resulta que $\hat{d}(\dot{x}, \dot{z}) \leqq \hat{d}(\dot{x}, \dot{y}) + \hat{d}(\dot{y}, \dot{z})$.

Si x es un punto de E, sea $(x_n) \in X$ la sucesión de Cauchy en que $x_n = x$ para cada $n \in N$, y sea $\dot{x} \in \hat{E}$ la clase de equivalencia módulo R que contiene (x_n). Está claro que la aplicación $J: x \mapsto \dot{x}$ de E en $\hat{E}$ es una isometría de E sobre su imágen $J(E)$ en $\hat{E}$.

Sea $\dot{x}$ un punto de $\hat{E}$ y sea (x_n) un representante de $\dot{x}$ en X. Si ponemos $\dot{x}_m = J(x_m)$ para $m \in N$, entonces la sucesión $(\dot{x}_m)$ converge en $\hat{E}$ hacia $\dot{x}$, ya que $\hat{d}(\dot{x}, \dot{x}_m) = \lim_{n \to \infty} d(x_n, x_m)$ y, puesto que (x_n) es una sucesión de Cauchy, se tiene $d(x_n, x_m) \leqq \epsilon$ para $n, m \geqq N(\epsilon)$, y por lo tanto $\hat{d}(\dot{x}, \dot{x}_m) \leqq \epsilon$ para $m \geqq N(\epsilon)$. Esto demuestra que $J(E)$ es denso en $\hat{E}$ (prop. 4.4).

Finalmente, demostramos que el espacio métrico $\hat{E}$ es completo. Sea $(\dot{x}_n)$ una sucesión de Cauchy en $\hat{E}$. Para cada $n \in N$ existe un punto $\dot{y}_n = J(y_n) \in J(E)$ tal que $\hat{d}(\dot{x}_n, \dot{y}_n) \leqq \frac{1}{2^n}$. La sucesión (y_n) es una sucesión de Cauchy en E puesto que

$$d(y_n, y_m) = \hat{d}(\dot{y}_n, \dot{y}_m) \leqq \hat{d}(\dot{y}_n, \dot{x}_n) + \hat{d}(\dot{x}_n, \dot{x}_m) + \hat{d}(\dot{x}_m, \dot{y}_m).$$

Por lo tanto (y_n) es el representante de un punto $\dot{x}$ de $\hat{E}$. Hemos visto que entonces $(\dot{y}_n)$ converge hacia $\dot{x}$. Puesto que $\hat{d}(\dot{x}, \dot{x}_n) \leqq \leqq \hat{d}(\dot{x}, \dot{y}_n) + \hat{d}(\dot{y}_n, \dot{x}_n) \leqq \hat{d}(\dot{x}, \dot{y}_n) + \frac{1}{2^n}$, también la sucesión $(\dot{x}_n)$ converge hacia $\dot{x}$. ◇

La pareja $(J, \hat{E})$ construida en el teorema 4.1 se llama un *completado* de E. Veremos en la § 5 que en un cierto sentido la pareja $(J, \hat{E})$ es única. En la práctica se suele identificar E con $J(E)$,

b) Dése una sucesión (g_n) de funciones continuas definidas sobre $[0, 1]$ con valores en $\mathbf{R}$, tal que para $0 \leqq x < 1$ la sucesión $(g_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ converge hacia 0, y la sucesión $(g_n(1))$ converge hacia 1.

5) Demuéstrese que el espacio métrico l^2 es separable.

6) Demuéstrese que el espacio métrico $\mathcal{C}(K)$ es separable. (Utilícese por ejemplo el teorema de aproximación polinomial de Weierstrass.)

7) En el anillo $\mathbf{Z}$ de los números enteros sea m un número fijo. Se dice que dos números enteros a y b son congruentes módulo m, y se escribe $a \equiv b$ (mod. m), si m divide $b - a$.

a) Demuéstrese que $a \equiv b$ (mod. m) si, y sólo si, a y b dejan el mismo residuo al dividirlos por m.

b) Demuéstrese que la congruencia de dos números es una relación de equivalencia sobre $\mathbf{Z}$.

c) Demuéstrese que el conjunto cociente, que se suele denotar por $\mathbf{Z}/m$, es, con las operaciones inducidas, un anillo de m elementos.

§ 5. Funciones Continuas

En el caso de dos espacios métricos, la definición de una función continua (cf. def. **2**. 5. 1) tiene la forma siguiente:

Definición 5. 1. *Sean* X *e* Y *dos espacios métricos, y* f *una función definida en* X, *con valores en* Y. *Se dice que* f *es continua en el punto* $x \in X$ *si para cualquier vecindad* W *de* $f(x)$ *en* Y *el conjunto* $f^{-1}(W)$ *es una vecindad de* x *en* X.

Se puede dejar al lector la fácil tarea de convencerse de que las proposiciones 5. 1-5. 7, junto con sus demostraciones, y la definición 5. 2 de los dos primeros capítulos se adaptan inmediatamente al caso de funciones definidas en un espacio métrico X con valores en otro espacio métrico Y. La única excepción es el corolario de la prop. 5. 5, que evidentemente no tiene sentido sino cuando se trata de funciones con valores en la recta real $\mathbf{R}$. A continuación nos referimos a la forma general de estos resultados con el mismo número que llevan en los dos primeros capítulos.

Generalizaremos ahora el teorema 2. 5. 1. Sean X e Y dos espacios métricos cuyas métricas respectivas representaremos por d_X y d_Y. Sobre el producto cartesiano $X \times Y$ definiremos la métrica producto $d_{X \times Y} = d$ poniendo

$$d((x, y), (x', y')) = \{d_X(x, x')^2 + d_Y(y, y')^2\}^{\frac{1}{2}}$$

para toda pareja $(x, y), (x', y')$ de puntos de $X \times Y$. Verifiquemos que la función d es en efecto una métrica sobre $X \times Y$. En primer lugar $d((x, y), (x', y')) = 0$ es equivalente a las dos relaciones $d_X(x, x') = 0$ y $d_Y(y, y') = 0$, es decir a $x = x'$, $y = y'$ y éstas últimas significan que $(x, y) = (x', y')$. La propiedad $d((x, y), (x', y')) = d((x', y'), (x, y))$ es evidente. Finalmente, si (x, y), (x', y') y (x'', y'') son tres puntos de $X \times Y$, entonces utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz (lema **2. 1. 1**) obtenemos

$$\begin{aligned}
d((x, y), (x'', y''))^2 &= d_X(x, x'')^2 + d_Y(y, y'')^2 \leqq \\
&\leqq \{d_X(x, x') + d_X(x', x'')\}^2 + \{d_Y(y, y') + d_Y(y', y'')\}^2 = \\
&= d_X(x, x')^2 + d_X(x', x'')^2 + d_Y(y, y')^2 + d_Y(y', y'')^2 + \\
&+ 2\{d_X(x, x')d_X(x', x'') + d_Y(y, y')d_Y(y', y'')\} \leqq \\
&\leqq d_X(x, x')^2 + d_Y(y, y')^2 + d_X(x', x'')^2 + d_Y(y', y'')^2 + \\
&+ 2\{d_X(x, x')^2 + d_Y(y, y')^2\}^{\frac{1}{2}}\{d_X(x', x'')^2 + d_Y(y', y'')^2\}^{\frac{1}{2}} = \\
&= [\{d_X(x, x')^2 + d_Y(y, y')^2\}^{\frac{1}{2}} + \{d_X(x', x'')^2 + d_Y(y', y'')^2\}^{\frac{1}{2}}]^2 = \\
&= [d((x, y), (x', y')) + d((x', y'), (x'', y''))]^2 .
\end{aligned}$$

Tomando las raíces cuadradas positivas del primero y del último miembro se obtiene la desigualdad del triángulo para d.

Obsérvese que si $X = \mathbf{R}^p$ e $Y = \mathbf{R}^q$, con sus métricas respectivas, entonces d es precisamente la métrica de $X \times Y = \mathbf{R}^{p+q}$ (cf. cap. segundo, § 5). De ahora en adelante, al hablar del producto cartesiano de dos espacios métricos, se lo considerará provisto de la métrica producto. Para toda pareja $(x, y), (x', y')$ de $X \times Y$ se tienen las desigualdades $d_X(x, x') \leqq d((x, y), (x', y'))$ y $d_Y(y, y') \leqq d((x, y), (x', y'))$.

Teorema 5. 1. *Sean* X, Y *y* Z *tres espacios métricos,* f *una función definida en* X *con valores en* Y *y* g *una función definida en* X *con valores en* Z. *Entonces la función* $h: x \mapsto (f(x), g(x))$ *definida en* X, *con valores en* $Y \times Z$, *es continua si, y sólo si, las dos funciones* f *y* g *son continuas.*

Demostración. Supóngase primero que f y g son continuas sobre X, y sea x un punto de X. Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que las condiciones $x' \in X$, $d_X(x, x') \leqq \delta_1$ implican $d_Y(f(x), f(x')) \leqq \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$, y existe $\delta_2 > 0$ tal que las condiciones $x' \in X$, $d_X(x, x') \leqq \delta_2$ implican

$d_Z(g(x), g(x')) \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ (prop. 5.2). Si δ es el menor de los dos números δ_1 y δ_2, entonces de las condiciones $x' \in X$, $d_X(x, x') \leq \delta$ se infiere

$$\begin{aligned} d_{Y\times Z}(h(x), h(x')) &= \{d_Y(f(x), f(x'))^2 + d_Z(g(x), g(x'))^2\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left[\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \varepsilon. \end{aligned}$$

es decir, h es continua en x (prop. 5.2).

Inversamente, supóngase que h es continua. Para cada punto $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x' \in X$ y $d_X(x, x') \leq \delta$ implican $d_{Y\times Z}(h(x), h(x')) \leq \varepsilon$, y con más razón $d_Y(f(x), f(x')) \leq \varepsilon$, $d_Z(g(x), g(x')) \leq \varepsilon$. Por lo tanto, f y g son continuas (prop. 5.2). ◇

Se deja al lector la generalización del teorema 2.5.2 al caso de una función continua $f: X \times Y \to Z$, donde X, Y y Z son espacios métricos.

Proposición 5.8. *Sean* X *e* Y *dos espacios métricos, y* f *y* g *dos funciones continuas definidas en* X *con valores en* Y. *Entonces el conjunto de los puntos* x *tales que* $f(x) = g(x)$ *es cerrado.*

Demostración. Póngase $F = \{x \mid f(x) = g(x)\}$, y sea y un punto adherente a F. Existe (prop. 4.2) una sucesión (x_n) de puntos de F que converge hacia y. Puesto que las funciones f y g son continuas, la sucesión $(f(x_n))$ converge hacia $f(y)$ y la sucesión $(g(x_n))$ converge hacia $g(y)$ (prop. 5.3). Pero $f(x_n) = g(x_n)$ para todo $n \in \mathbf{N}$; luego $f(y) = g(y)$ (ejerc. 4.1.b) y por lo tanto, $y \in F$, es decir, F es cerrado (def. 2.9). ◇ 87

Bosquejemos otra demostración de la prop. 5.8, cuyo interés reside en que mantiene su validez en situaciones generales en las cuales el razonamiento empleado arriba la pierde (cf. cap. cuarto, § 4). Sea $F = \{x \mid f(x) = g(x)\}$, y sea h la función $x \mapsto (f(x), g(x))$ con valores en $Y \times Y$. La diagonal Δ de $Y \times Y$, es decir, el conjunto de todos los puntos (y, y), $y \in Y$, es un subconjunto cerrado de $Y \times Y$ (ejerc. 5). Puesto que h es continua en virtud del teorema 5.1, el conjunto $F = h^{-1}(\Delta)$ es cerrado (prop. 5.5).

Corolario. *Sean* X *e* Y *dos espacios métricos, y* f *y* g *dos funciones continuas definidas en* X *con valores en* Y. *Si* $f(x) = g(x)$ *para todos los puntos* x *de un conjunto* D *que es denso* (def. 4.4) *en* X, *entonces* f *y* g *coinciden en cada punto de* X.

Demostración. En virtud de la prop. 5.8, se tiene $f(x) = g(x)$ para todo punto x de un conjunto cerrado que contiene D. Con más razón (prop. 2.10) se tiene $f(x) = g(x)$ para $x \in \bar{D}$, pero $\bar{D} = X$. ◇

Más adelante se necesitará el resultado siguiente:

Proposición 5.9. *Sea* E *un espacio métrico. Si* (x_n) *es una sucesión de puntos que converge hacia el punto* x, *e* (y_n) *es una sucesión de puntos que converge hacia el punto* y, *entonces la sucesión de números positivos* $(d(x_n, y_n))$ *converge hacia el número* $d(x, y)$. *En otras palabras, la función* $(x, y) \mapsto d(x, y)$ *definida en* $E \times E$ *y con valores en* $\mathbf{R}_+$ *es continua* (cf. prop. 5.3 y ejercicio 3).

Demostración. (cf. la demostración de que el límite en la fórmula (3) existe, en la demostración del teorema 4.1.) De las desigualdades

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y)$$

y

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n)$$

resulta

$$-d(x, x_n) - d(y, y_n) \leq d(x, y) - d(x_n, y_n) \leq d(x, x_n) + d(y, y_n)$$

es decir

$$|d(x, y) - d(x_n, y_n)| \leq d(x, x_n) + d(y, y_n).$$

Dado un número $\epsilon > 0$, existe un número entero N tal que $d(x, x_n) \leq \frac{\epsilon}{2}$ y $d(y, y_n) \leq \frac{\epsilon}{2}$ para $n \geq N$ (def. 4.1), y por lo tanto, $|d(x, y) - d(x_n, y_n)| \leq \epsilon$ para $n \geq N$, lo que demuestra la proposición (def. 1.4.1). ◇

Reiteremos aquí una definición que en los capítulos anteriores habíamos introducido sólo en las § 6 (def. 2.6.2).

Definición 5.3. *Sean* X *e* Y *dos espacios métricos. Una función* f *definida en* X *y con valores en* Y *se dice uniformemente continua si, para cada número* $\epsilon > 0$, *existe un número* $\delta > 0$ *tal que si los puntos* $x, x' \in X$ *satisfacen a* $d(x, x') \leq \delta$, *entonces* $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$.

Una función uniformemente continua es, en particular, continua (prop. 5.2 y def. 5.2).

razón (prop. 2.10) se tiene $f(x) = g(x)$ para $x \in \bar{D}$, pero $\bar{D} = X$. ◇

Más adelante se necesitará el resultado siguiente:

Proposición 5.9. *Sea E un espacio métrico. Si* (x_n) *es una sucesión de puntos que converge hacia el punto* x, *e* (y_n) *es una sucesión de puntos que converge hacia el punto* y, *entonces la sucesión de números positivos* $(d(x_n, y_n))$ *converge hacia el número* $d(x, y)$. *En otras palabras, la función* $(x, y) \mapsto d(x, y)$ *definida en* $E \times E$ *y con valores en* $\mathbf{R}_+$ *es continua* (cf. prop. 5.3 y ejercicio 3).

Demostración. (cf. la demostración de que el límite en la fórmula (3) existe, en la demostración del teorema 4.1.) De las desigualdades

$$d(x, y) \leqq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y)$$

y

$$d(x_n, y_n) \leqq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n)$$

resulta

$$-d(x, x_n) - d(y, y_n) \leqq d(x, y) - d(x_n, y_n) \leqq d(x, x_n) + d(y, y_n)$$

es decir

$$|d(x, y) - d(x_n, y_n)| \leqq d(x, x_n) + d(y, y_n).$$

Dado un número $\epsilon > 0$, existe un número entero N tal que $d(x, x_n) \leqq \frac{\epsilon}{2}$ y $d(y, y_n) \leqq \frac{\epsilon}{2}$ para $n \geqq N$ (def. 4.1), y por lo tanto, $|d(x, y) - d(x_n, y_n)| \leqq \epsilon$ para $n \geqq N$, lo que demuestra la proposición (def. 1.4.1). ◇

Reiteremos aquí una definición que en los capítulos anteriores habíamos introducido sólo en las § 6 (def. 2.6.2).

Definición 5.3. *Sean* X *e* Y *dos espacios métricos. Una función f definida en* X *y con valores en* Y *se dice uniformemente continua si, para cada número* $\epsilon > 0$, *existe un número* $\delta > 0$ *tal que si los puntos* $x, x' \in X$ *satisfacen a* $d(x, x') \leqq \delta$, *entonces* $d(f(x), f(x')) \leqq \epsilon$.

Una función uniformemente continua es, en particular, continua (prop. 5.2 y def. 5.2).

Proposición 5.10. *Sea* $f: \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *una función uniformemente continua* (def. 5.3) *y* (x_n) *una sucesión de Cauchy* (def. 4.2) *en* X. *Entonces* $(f(x_n))$ *es una sucesión de Cauchy en* Y.

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x,x') \leqq \delta$ implica $d(f(x), f(x')) \leqq \epsilon$. Por otro lado, existe $\mathrm{N}(\delta)$ tal que $d(x_n,x_m) \leqq \delta$ para $n \geqq \mathrm{N}(\delta)$ y $m \geqq \mathrm{N}(\delta)$. Por consiguiente, $d(f(x_n), f(x_m)) \leqq \epsilon$ para $n \geqq \mathrm{N}(\delta)$, $m \geqq \mathrm{N}(\delta)$. ◇

Teorema 5.3. *Sea* X *un espacio métrico,* D *un subconjunto denso* (def. 4.4) *de* X *e* Y *un espacio métrico completo* (def. 4.3). *Si* f *es una función uniformemente continua definida en* D (provisto de la métrica inducida, § 3) *con valores en* Y, *entonces existe una función* $\tilde{f}: \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *uniformemente continua, y una sola, tal que* $\tilde{f}(x) = f(x)$ *para todo* $x \in \mathrm{D}$.

Demostración. Para un punto $x \in \mathrm{D}$ se pone naturalmente $\tilde{f}(x) = f(x)$. Sea x un punto de X que no pertenece a D, y sea (d_n) una sucesión de puntos de D que converge hacia x (prop. 4.4). Entonces, (d_n) es una sucesión de Cauchy en D y resulta de la prop. 5.10 que $(f(d_n))$ es una sucesión de Cauchy en Y. Puesto que Y es completo, $(f(x_n))$ converge hacia un punto $y \in \mathrm{Y}$, y se pone $\tilde{f}(x) = y$.

El punto $y \in \mathrm{Y}$ es independiente de cómo se elija la sucesión de Cauchy (d_n) que converge hacia x. En efecto, sea (e_n) otra sucesión de puntos de D que converge hacia x, y sea ϵ un número >0. Existe un número $\delta > 0$ tal que $d(x,x') \leqq \delta$, $x,x' \in \mathrm{D}$ implica $d(f(x), f(x')) \leqq \frac{\epsilon}{3}$. Luego existe un número entero positivo N tal que $d(x, d_n) \leqq \frac{\delta}{2}$ y $d(x,e_n) \leqq \frac{\delta}{2}$, y por lo tanto $d(d_n,e_n) \leqq \delta$ y $d(f(d_n),f(e_n)) \leqq \frac{\epsilon}{3}$ para $n \geqq \mathrm{N}$. Sea z el límite de la sucesión $(f(e_n))$. Para n suficientemente grande tenemos

$$\begin{aligned} d(y, z) &\leqq d(y, f(d_n)) + d(f(d_n), f(e_n)) + d(f(e_n), z) \\ &\leqq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon . \end{aligned}$$

Puesto que ϵ representa un número >0 arbitrario, se tiene $d(y, z) = 0$, es decir, $y = z$.

Sea ϵ un número >0 y sea $\delta > 0$ tal que $d(x,x') \leqq 3\delta$ implique $d(f(x), f(x')) \leqq \frac{\epsilon}{3}$ para $x, x' \in \mathrm{D}$. Demostraremos que entonces $d(x,x') \leqq \delta$ implica $d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(x')) \leqq \epsilon$ para $x, x' \in \mathrm{X}$. Sean, en efecto, x y x' dos puntos de X tales que $d(x,x') \leqq \delta$. Sea (d_n) una sucesión de puntos de D que converge hacia x, y (e_n) una sucesión de puntos de D que converge hacia x'. Puesto que $(f(d_n))$ converge hacia $\tilde{f}(x)$ y $(f(e_n))$ converge hacia $\tilde{f}(x')$, existe un número entero positivo N tal que

$$d(x, d_n) \leq \delta, \qquad d(x', e_n) \leq \delta,$$

$$d(\tilde{f}(x), f(d_n)) \leq \frac{\varepsilon}{3}, \qquad d(\tilde{f}(x'), f(e_n)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

para $n \geq \mathrm{N}$. Ahora bien,

$$d(d_n, e_n) \leq d(d_n, x) + d(x, x') + d(x', e_n)$$
$$\leq \delta + \delta + \delta = 3\delta,$$

y por lo tanto $d(f(d_n), f(e_n)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ para $n \geq \mathrm{N}$. Tomando $n \geq \mathrm{N}$ se obtiene finalmente:

$$d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(x')) \leq d(\tilde{f}(x), f(d_n)) + d(f(d_n), f(e_n)) + d(f(e_n), \tilde{f}(x')) \leq$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

La unicidad de la función $\tilde{f}$ resulta del corolario de la prop. 5.8. ◊

Corolario. *Si en el teorema* 5.3 *la función f es una isometría de* D *sobre* $f(\mathrm{D})$, *entonces $\tilde{f}$ es una isometría de* X *sobre* $\tilde{f}(\mathrm{X})$.

Demostración. Sean x y x' dos puntos de X y sean (d_n) y (e_n) dos sucesiones de puntos de D que convergen hacia x y x', respectivamente. En virtud de la definición de $\tilde{f}$ y de la prop. 5.9 tenemos

$$d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(x')) = d(\lim f(d_n), \lim f(e_n)) =$$
$$= \lim d(f(d_n), f(e_n)) = \lim d(d_n, e_n) =$$
$$= d(x, x'). \quad \lozenge$$

Ahora se puede enunciar y demostrar la unicidad ya mencionada del completado de un espacio métrico.

Proposición 5.11. *Sea* E *un espacio métrico. Para* $k = 1, 2$ *sea* $\hat{\mathrm{E}}_k$ *un espacio métrico completo y* j_k *una aplicación de* E *en* $\hat{\mathrm{E}}_k$ *tal que* $j_k(\mathrm{E})$ *es denso en* $\hat{\mathrm{E}}_k$ *y* j_k *es una isometría de* E *sobre* $j_k(\mathrm{E})$. *Entonces existe una isometría* i *de* $\hat{\mathrm{E}}_1$ *sobre* $\hat{\mathrm{E}}_2$ *y una sola tal que* $j_2 = i \circ j_1$.

Demostración. La aplicación $j_2 \circ j_1^{-1}$ es una isometría de $j_1(\mathrm{E})$ sobre $j_2(\mathrm{E})$ y con más razón uniformemente continua. Puesto que $j_1(\mathrm{E})$ es denso en $\hat{\mathrm{E}}_1$ y $\hat{\mathrm{E}}_2$ es completo, en virtud del teorema 5.3

existe una aplicación $i : \hat{E}_1 \to \hat{E}_2$ que sobre $j_1(E)$ coincide con $j_2 \circ j_1^{-1}$, y en virtud del corolario i es una isometría. Además, se tiene $i \circ j_1 = j_2 \circ j_1^{-1} \circ j_1 = j_2$. Falta pues demostrar que i aplica $\hat{E}_1$ sobre $\hat{E}_2$. Sea $y \in \hat{E}_2$. Existe una sucesión de puntos (y_n) de $j_2(E)$ que converge hacia y. Poniendo $x_n = j_1(j_2^{-1}(y_n))$ para cada $n \in N$, se obtiene una sucesión de Cauchy (x_n) de puntos de $j_1(E)$ que converge hacia un punto $x \in \hat{E}_1$. Tenemos, pues, $i(x) = \lim_{n\to\infty} i(x_n) = \lim_{n\to\infty} j_2(j_1^{-1}(x_n)) = \lim_{n\to\infty} y_n = y$. ◊

Ejercicios

1) Enúnciense y demuéstrense detalladamente las proposiciones 5.1-5.7 y el teorema 5.2.

2) Defínase la métrica producto sobre el producto cartesiano. $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p$ de varios espacios métricos y generalícense los teoremas 5.1 y 5.2 para este caso.

3) Sean X e Y dos espacios métricos y $X \times Y$ su producto cartesiano provisto de la métrica producto. Si (x_n) es una sucesión de puntos de X e (y_n) es una sucesión de puntos de Y, demuéstrese que la sucesión $((x_n, y_n))_{n\in N}$ converge en $X \times Y$ hacia el punto (x, y) si, y sólo si, (x_n) converge hacia x e (y_n) converge hacia y. 91

4) Demuéstrese que si E es un espacio métrico, entonces la función $(x, y) \mapsto d(x, y)$ es uniformemente continua sobre $E \times E$.

5) Sea E un espacio métrico. Demuéstrese que la diagonal $\Delta = \{(x, x) \mid x \in E\}$ es un subconjunto cerrado de $E \times E$. (Utilícese el ejercicio 1 a) de la § 4.).

6) Sean X e Y dos espacios métricos, y $(f_n)_{n\in N}$ una sucesión de funciones $f_n : X \to Y$. Se dice que (f_n) converge uniformemente sobre X hacia la función $f : X \to Y$ si para cada número $\varepsilon > 0$ existe un número entero $N(\varepsilon)$ tal que $n \geqq N(\varepsilon)$ implica $d(f(x), f_n(x)) \leqq \varepsilon$ para todo $x \in X$. Demuéstrese que si (f_n) es una sucesión de funciones continuas $f_n : X \to Y$ que converge uniformemente hacia $f : X \to Y$, entonces f es continua.

7) Sea E un espacio métrico, y $(j, \hat{E})$ su completado. Demuéstrese que si f es una aplicación uniformemente continua de E en un espacio métrico completo arbitrario X, entonces existe una aplicación uniformemente continua $\hat{f} : \hat{E} \to X$ tal que $\hat{f} \circ j = f$. Demuéstrese que, inversamente, si la pareja $(j, \hat{E})$ tiene esta propiedad, entonces es un completado de E.

§ 6. Espacios Compactos

Definición 6.1. *Se dice que un espacio métrico* E *es compacto si para cada recubrimiento* $(A_\iota)_{\iota\in I}$ *de* E *con conjuntos abiertos* A_ι *existe una subfamilia finita* $A_{\iota_1}, \ldots, A_{\iota_n}$ *que cubre* E. *Se dice que un subconjunto* K *de un espacio métrico es compacto si, provisto de la métrica inducida* (§ 3), *es un espacio compacto.*

Proposición 6.1. *Sea* E *un espacio métrico. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) E *es compacto.*

(ii) *Para cada familia* $(F_\iota)_{\iota\in I}$ *de conjuntos cerrados* F_ι *tal que* $\bigcap_{\iota\in I} F_\iota = \emptyset$, *existe una subfamilia finita* $F_{\iota_1}, \ldots, F_{\iota_n}$ *tal que* $\bigcap_{k=1}^{n} F_{\iota_k} = \emptyset$.

(iii) *Para cualquier sucesión* $(A_n)_{n\in \mathbf{N}}$ *de subconjuntos abiertos de* E *tal que* $A_n \subset A_{n+1}$ *para* $n \in \mathbf{N}$ *y* $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n = E$, *existe un índice* $s \in \mathbf{N}$ *tal que* $A_s = E$.

(iv) *Para cualquier sucesión* $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *de subconjuntos cerrados de* E *tal que* $F_n \supset F_{n+1}$ *para* $n \in \mathbf{N}$ *y* $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} F_n = \emptyset$, *existe un índice* $s \in \mathbf{N}$ *tal que* $F_s = \emptyset$.

(v) *Toda sucesión de puntos de* E *tiene una subsucesión convergente.*

Demostración. La equivalencia de (i) y de (ii), basada en que A_ι es abierto si, y sólo si, $F_\iota = \complement A_\iota$ es cerrado y en que $\bigcup_{\iota\in I} A_\iota = E$ si, y sólo si, $\bigcap_{\iota\in I} F_\iota = \emptyset$, se ve como en la demostración de la prop. 1.6.1, y es verdaderamente trivial. De modo semejante se ve que las condiciones (iii) y (iv) son equivalentes y que las condiciones (i) y (ii) implican las condiciones (iii) y (iv), como ocurre en la demostración de la prop. 1.6.2. Que (i) implica (v) y que (v) implica (iv) se demuestra como en la demostración de la prop. 1.6.3.

Demostremos ahora que (iv) implica (v). Sea (x_n) una sucesión de puntos de E, y para cada número $n \in \mathbf{N}$ sea F_n la adherencia del conjunto $\{x_m | m \geqq n\}$. Está claro que $F_n \supset F_{n+1}$ para $n \in \mathbf{N}$, y cada F_n es cerrado en virtud de la prop. 2.9. Puesto que ningún conjunto F_n es vacío, existe un punto $x \in \bigcap_{n\in\mathbf{N}} F_n$. Definiremos por inducción completa una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) que converge hacia x (cf. ejercicio 2 de la § 4). Sea $x_{n_0} = x_0$ y supóngase que ya se han definido los elementos x_{n_j}, con $0 \leq j < k$. Puesto que $x \in F_k$, el punto x es adherente al conjunto $\{x_m | m \geq k\}$, y por lo tanto, la bola $B_{1/k}(x)$ encuentra este conjunto. Se escoge entonces n_k tal que $n_k \geq k$, $n_k > n_{k-1}$ y $x_{n_k} \in B_{1/k}(x)$. Como $d(x, x_{n_j}) \leq \frac{1}{k}$ para $j \geq k$, la sucesión (x_{n_k}) converge efectivamente hacia x.

Luego demostraremos que si se cumple la condición (v), entonces el espacio E es separable (def. 4.5) y, por lo tanto, de tipo enumerable (prop. 4.5). Sean k un número entero ≥ 1 y $x_0^{(k)}$ un punto arbitrario de E. Después sea $x_1^{(k)}$ un punto de E tal que $d(x_1^{(k)}, x_0^{(k)}) \geq \frac{1}{k}$, $x_2^{(k)}$ un punto de E tal que $d(x_2^{(k)}, x_0^{(k)}) \geq \frac{1}{k}$ y $d(x_2^{(k)}, x_1^{(k)}) \geq \frac{1}{k}$, ..., $x_j^{(k)}$ un punto de E tal que $d(x_j^{(k)}, x_i^{(k)}) \geq \frac{1}{k}$ para $0 \leq i \leq j-1$, etc. Esta construcción debe terminar después de un número finito de pasos, ya que de otra manera se obtendría una sucesión $(x_n^{(k)})_{n \in N}$ tal que $d(x_n^{(k)}, x_m^{(k)}) \geq \frac{1}{k}$ para todo n, m y que, por lo tanto, no tendría ninguna subsucesión convergente. De esta manera hemos construido una familia finita $(x_n^{(k)})_{n \in I_k}$ de puntos de E tal que, para todo $x \in E$, existe un punto $x_n^{(k)}$ tal que $d(x, x_n^{(k)}) < \frac{1}{k}$. La reunión de todos los conjuntos $\{x_n^{(k)} | n \in I_k\}$, cuando k recorre los números enteros ≥ 1, es un conjunto enumerable y, en virtud de la prop. 4.3, es denso en E.

Finalmente, podemos demostrar que si se cumple (iii) entonces se cumple (i). En primer lugar, si se cumplen las condiciones equivalentes (iii) y (iv), entonces se cumple (v), y por lo tanto E es de tipo enumerable, es decir, existe una sucesión $(0_k)_{k \in N}$ de conjuntos abiertos tales que cada conjunto abierto de E es la reunión de ciertos conjuntos 0_k. Sea, pues, $(A_\iota)_{\iota \in I}$ una familia de conjuntos abiertos tal que $\bigcup_{\iota \in I} A_\iota = E$ y sea $(B_n)_{n \in N}$ la colección de aquellos conjuntos 0_k que están contenidos en algún conjunto A_ι. (Se puede suponer que la familia (B_n) es infinita, ya que en el caso contrario no hay nada que demostrar.) Si se pone $C_n = \bigcup_{k=0}^{n} B_k$ para cada $n \in \mathbf{N}$, entonces $(C_n)_{n \in N}$ es una sucesión de conjuntos abiertos tal que $C_n \subset C_{n+1}$ para $n \in \mathbf{N}$, y puesto que cada A_ι es la reunión de los conjuntos B_n que contiene, tenemos también $\bigcup_{n \in N} C_n = E$. En virtud de (iii) existe un índice $s \in \mathbf{N}$ tal que $C_s = E$, es decir $\bigcup_{k=0}^{s} B_k = E$. Si a cada índice k, con $0 \leq k \leq s$, hacemos corresponder un conjunto A_{ι_k} que contiene B_k, entonces la familia $(A_{\iota_k})_{0 \leq k \leq s}$ cubre E, lo que demuestra que E es compacto, es decir, que se cumple (i).

Así se ha demostrado completamente la proposición 6.1 según el esquema lógico

$$\begin{tikzcd}
(i) \arrow[rr, Leftrightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[dd, Leftrightarrow] & & (ii) \arrow[dd, Rightarrow] \\
& (v) \arrow[dr, Rightarrow] & \\
(iii) \arrow[rr, Leftrightarrow] & & (iv)
\end{tikzcd}$$

Obsérvese que la implicación (iv) ⇒ (v) se ha utilizado para demostrar que (iii) ⇒ (i). ◊

Generalizando la definición dada para espacios euclidianos, se dice que un subconjunto de un espacio métrico es *acotado* si está contenido en una bola. Se comprueba exactamente como en la segunda parte de la demostración de la prop. 2.6.4, la

Proposición 6.2. *Todo subconjunto compacto de un espacio métrico es acotado y cerrado.*

Pero la inversa de la prop. 6.2 ya no es cierta en espacios métricos arbitrarios, como se verá en seguida.

Ejemplo 6.1. En el espacio l^2 (ejemplo 1.3) denotamos por ε_n el elemento $\xi = (\xi_k)_{k\in N}$ tal que $\xi_n = 1$ y $\xi_k = 0$ para $k \neq n$. El conjunto $\{\varepsilon_n | n \in \mathbf{N}\}$ no es compacto, ya que se tiene $d(\varepsilon_n, \varepsilon_m) = \sqrt{2}$ para $n \neq m$. Por otra parte, el conjunto es acotado, ya que $\|\varepsilon_n\| = 1$ para todo n. También el conjunto es cerrado. En efecto, sea ξ un punto de l^2 tal que cada bola $B_\rho(\xi)$ contiene un elemento ε_n. Entonces, para $\rho < \frac{1}{2}\sqrt{2}$ cada bola $B_\rho(\xi)$ contiene el mismo elemento ε_m, ya que si $B_\rho(\xi)$ contuviera ε_m y $B_\sigma(\xi)$ contuviera ε_k, se tendría $d(\varepsilon_m, \varepsilon_k) \leq d(\varepsilon_m, \xi) + d(\varepsilon_k, \xi) \leq \rho + \sigma < \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, que es imposible si $m \neq k$. De esta manera, $d(\xi, \varepsilon_m) \leq \rho$ para todo $\rho > 0$, de donde $d(\xi, \varepsilon_m) = 0$, es decir, $\xi = \varepsilon_m$ pertenece al conjunto $\{\varepsilon_n | n \in \mathbf{N}\}$.

Se puede dejar a cargo del lector el generalizar la prop. 2.6.5 y los teoremas 2.6.1-2.6.3 al caso de funciones continuas definidas en un espacio métrico compacto y con valores en un espacio métrico (respectivamente, para el teorema 2.6.2, tomando sus valores en $\mathbf{R}$).

Ejercicios

1) Repásense detalladamente las demostraciones de las implicaciones (i)⇔(ii), (iii)⇔(iv), (i)⇒(iii), (ii)⇒(iv), (i)⇒(v) y (v)⇒(iv) en la prop. 6.1.

2) Demuéstrese la prop. 6.2.

3) Demuéstrese que el subconjunto de $\mathcal{C}(K)$ (ejemplo 1.2) compuesto de todos los elementos f tales que $\|f\| \leqq 1$ es acotado y cerrado, pero no compacto.

4) Demuéstrese que el subconjunto de todos los elementos $\xi = (\xi_n)_{n\in N}$ de l^2, tales que $|\xi_n| \leqq \frac{1}{n+1}$ para todo $n \in N$, es compacto.

5) Generalícese la prop. 2.6.5 y los teoremas 2.6.1-2.6.3.

6) Demuéstrese que cada subconjunto cerrado de un espacio compacto es compacto.

7) Se dice que un espacio métrico E es precompacto (o totalmente acotado) si su completado $\hat{E}$ es un espacio compacto.

a) Demuéstrese que las condiciones siguientes son equivalentes:

(i) E es precompacto.

(ii) Para cada número $\epsilon > 0$ existe una familia finita $a_1, \ldots, a_k$ de elementos de E tal que, para todo punto $x \in E$, hay un $a_j (1 \leqq j \leqq k)$ que verifica $d(x, a_j) \leqq \epsilon$.

(iii) Cada sucesión de puntos de E tiene una subsucesión que es una sucesión de Cauchy.

b) Demuéstrese que E es compacto si, y sólo si, es precompacto y completo.

c) Demuéstrese que si f es una función uniformemente continua definida sobre un espacio métrico precompacto X con valores en un espacio métrico Y, entonces $f(X)$, provisto de la métrica inducida (§ 3), es un espacio precompacto.

4

ESPACIOS TOPOLOGICOS

§ 1. Definición de los Espacios Topológicos

Llegamos finalmente a la estructura más general en la cual se pueden estudiar los conceptos de continuidad y convergencia. Las propiedades de las vecindades de un punto, enumeradas en capítulos anteriores (cf. prop. 2.2.2), conducen de un modo natural a la definición siguiente:

Definición 1.1. *Una topología sobre un conjunto* E *se define haciendo corresponder a cada punto* $x \in$ E *una colección* $\mathcal{V}(x)$ *de subconjuntos de* E *de manera que se verifiquen los axiomas siguientes:*

(V1) *Si* V $\in \mathcal{V}(x)$ *y* U *es un conjunto que contiene a* V, *entonces* U $\in \mathcal{V}(x)$.

(V2) *Si* U $\in \mathcal{V}(x)$ *y* V $\in \mathcal{V}(x)$, *entonces* U $\cap$ V $\in \mathcal{V}(x)$.

(V3) *Para cada* V $\in \mathcal{V}(x)$ *se tiene* $x \in$ V.

(V4) *Para cada* V $\in \mathcal{V}(x)$ *existe* W $\in \mathcal{V}(x)$ *tal que para todo* $y \in$ W, *el conjunto* V *pertenece a* $\mathcal{V}(y)$.

Un conjunto E *junto con una topología definida sobre él se llama un espacio topológico, y se dice que* E *está provisto de la topología. Los conjuntos que pertenecen a la colección* $\mathcal{V}(x)$ *se llaman las vecindades del punto* x.

Ejemplo 1.1. De la § 2 del cap. tercero resulta que cada espacio métrico está provisto de una topología de manera natural.

Ejemplo 1.2. Sea M un conjunto, E un espacio métrico y denótese por $\mathcal{F}$(M;E) el conjunto de todas las aplicaciones de M en E. Sea además f un elemento de $\mathcal{F}$(M;E). Para toda familia finita $(x_j)_{1 \leq j \leq k}$ de elementos de M y para todo número $\epsilon > 0$ denótese por N$(f;x_1, \ldots, x_k, \epsilon)$ el conjunto de todas las aplicaciones g : M $\to$ E que verifican $d(f(x_j), g(x_j)) \leq \epsilon$ para $1 \leq j \leq k$. Una vecindad de f es, por definición, cualquier conjunto que contiene algún conjunto

Definición 1.2. *Sea* M *un subconjunto de un espacio topológico* E. *Un punto* $a \in$ E *es un punto interior de* M *si existe una vecindad* V *de* a *tal que* V $\subset$ M. *Un punto* $b \in$ E *es un punto exterior de* M *si existe una vecindad* V *de* b *tal que* V $\cap$ M $= \emptyset$. *Un punto* $c \in$ E *es un punto frontera de* M *si toda vecindad de* c *contiene puntos que pertenecen a* M *y puntos que no pertenecen a* M.

Definición 1.3. *El conjunto de todos los puntos interiores de un subconjunto* A *de un espacio topológico* E *se llama el interior de* A, *y se denota por* $\mathring{A}$. *Un subconjunto* A *de* E *es abierto si* A $=$ $= \mathring{A}$.

Obsérvese que, en virtud del axioma (V3), se tiene siempre $\mathring{A} \subset A$.

Proposición 1.1. *Sea* E *un espacio topológico, y* $\mathcal{A}$ *la colección de todos los subconjuntos abiertos de* E.

(A1) *El subconjunto vacío de* E *y* E *mismo pertenecen a* $\mathcal{A}$.

(A2) *Si* A *y* B *son dos conjuntos que pertenecen a* $\mathcal{A}$, *entonces* A $\cap$ B *pertenece a* $\mathcal{A}$.

(A3) *Si* $(A_\iota)_{\iota \in I}$ *es una familia arbitraria de conjuntos de* $\mathcal{A}$, *entonces* $\bigcup_{\iota \in I} A_\iota$ *pertenece a* $\mathcal{A}$.

99

Demostración. (A1) es evidente. Ahora, sean A y B dos conjuntos de $\mathcal{A}$ y sea $x \in A \cap B$. Existe una vecindad U de x contenida en A y una vecindad V de x contenida en B. Por el axioma (V2), el conjunto U $\cap$ V es una vecindad de x. Puesto que $U \cap V \subset A \cap B$ se tiene $A \cap B \in \mathcal{A}$.

Finalmente, si los A_ι son abiertos y $x \in \bigcup_{\iota \in I} A_\iota$, entonces x pertenece, por lo menos, a un conjunto A_ι. Existe pues una vecindad V de x tal que $V \subset A_\iota$, y con más razón $V \subset \bigcup_{\iota \in I} A_\iota$. ◇

Proposición 1.2. *El interior* $\mathring{A}$ *de cualquier subconjunto* A *de un espacio topológico es abierto.*

Demostración. Sea x un punto de $\mathring{A}$. Entonces existe una vecindad V de x tal que $V \subset A$. En virtud del axioma (V4), existe una vecindad W de x tal que, para todo $y \in W$, el conjunto V es una vecindad de y. Puesto que $V \subset A$, resulta que todo $y \in W$ pertenece a $\mathring{A}$, es decir, $W \subset \mathring{A}$. ◇

Proposición 1.3. *Un subconjunto* V *de un espacio topológico es vecindad del punto* x *si, y sólo si, contiene un conjunto abierto que a su vez contiene a* x.

Demostración. Si V es una vecindad de x, entonces en virtud del axioma (V4), existe una vecindad W de x tal que para todo $y \in$ $\in$ W el conjunto V es una vecindad de y. Por consiguiente, $W \subset \mathring{V}$, y según la prop. 1.2, el conjunto $\mathring{V}$ es abierto.

Inversamente, supóngase que V contiene el conjunto abierto A tal que $x \in A$. Entonces existe una vecindad U de x tal que $U \subset A$ y, con más razón, $U \subset V$. En virtud del axioma (V1) el conjunto V es una vecindad de x. ◇

La prop. 1.3 indica cómo definir una topología con la ayuda de sus conjuntos abiertos.

Teorema 1.1. *Sea* E *un conjunto y* $\mathcal{A}$ *una colección de subconjuntos de* E *que verifican las condiciones* (A1)-(A3) *de la prop.* 1.1. *Llamemos* V *una vecindad del punto* $x \in E$ *si existe un conjunto* $A \in \mathcal{A}$ *tal que* $x \in A \subset V$. *Las vecindades definidas de esta manera satisfacen los axiomas* (V1)-(V4) *de la def.* 1.1 *y, además, los conjuntos abiertos para la topología así obtenida son precisamente los conjuntos que pertenecen a* $\mathcal{A}$.

Demostración. Verifiquemos primero que las colecciones $\mathcal{V}(x)$ de vecindades de x definidas en el teorema satisfacen los axiomas (V1)-(V4).

(V1) Sea $V \in \mathcal{V}(x)$ y U un conjunto que contiene a V. Por definición, existe un conjunto $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A \subset V$ y con más razón $A \subset U$. Por lo tanto, $U \in \mathcal{V}(x)$.

(V2) Sean $U \in \mathcal{V}(x)$ y $V \in \mathcal{V}(x)$. Existen dos conjuntos $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{A}$ tales que $x \in A \subset U$ y $x \in B \subset V$. En virtud de (A2) se tiene $A \cap B \in \mathcal{A}$ y, puesto que $x \in A \cap B \subset U \cap V$, el conjunto $U \cap V$ pertenece a $\mathcal{V}(x)$.

(V3) Resulta inmediatamente de la definición.

(V4) Sea $V \in \mathcal{V}(x)$. Existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A \subset V$. Además, para todo $y \in A$ se tiene $y \in A \subset V$; luego, tomando $W = A \in \mathcal{V}(x)$ se cumple $V \in \mathcal{V}(y)$ para todo $y \in W$.

Denótese por $\mathcal{A}'$ la colección de todos los conjuntos que son abiertos con respecto a la topología definida mediante estas vecindades, y mostremos que $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$. Sea A un conjunto de $\mathcal{A}'$. Si $A = \emptyset$, se sigue, en virtud de (A1), que $A \in \mathcal{Q}$. Si $A \neq \emptyset$, entonces para cada $x \in A$ existe una vecindad U_x de x tal que $U_x \subset A$ y, por definición, para cada $x \in A$ existe un conjunto $A_x \in \mathcal{Q}$ tal que $x \in A_x \subset \subset U_x$. Resulta entonces que $A = \bigcup_{x \in A} A_x$, y en virtud de (A3), el conjunto A pertenece a $\mathcal{Q}$.

Inversamente, si A pertenece a $\mathcal{Q}$, entonces para cada $x \in A$ el conjunto A pertenece a $\mathcal{V}(x)$. Así $A = \mathring{A}$, es decir, $A \in \mathcal{Q}'$. ◇

Ejemplo 1.5. Sea E un conjunto cualquiera, y tómese para $\mathcal{Q}$ la colección de todos los subconjuntos de E. Es claro que $\mathcal{Q}$ satisface las condiciones (A1)-(A3). La topología definida de esta manera se llama la topología discreta sobre E. Cualquier conjunto que contiene a $x \in E$ es una vecindad de x para esta topología.

Ejemplo 1.6. Si se toma para $\mathcal{Q}$ la colección que sólo consiste de los dos conjuntos $\emptyset$ y E, se obtiene una topología sobre E que se califica de *caótica* o indiscreta.

Proposición 1.4. *El interior* $\mathring{A}$ *de un conjunto* A *es la reunión de todos los conjuntos abiertos contenidos en* A.

Demostración. Sea B un conjunto abierto contenido en A y x un punto de B. Entonces B es una vecindad de x contenida en A, de manera que $x \in \mathring{A}$ y, por consiguiente, $B \subset \mathring{A}$, es decir, $\mathring{A}$ contiene todos los conjuntos abiertos contenidos en A. 101

Inversamente, sea x un punto de $\mathring{A}$. Entonces existe una vecindad V de x contenida en A, y por la prop. 1.3, existe un conjunto abierto B tal que $x \in B \subset V \subset A$. Esto significa que $\mathring{A}$ está contenido en la reunión de los conjuntos abiertos contenidos en A. ◇

Definición 1.4. *Se dice que un punto* a *de un espacio topológico* E *es adherente al conjunto* $M \subset E$ *si cada vecindad de* a *contiene por lo menos un punto de* M. *El conjunto de todos los puntos adherentes a* M *se llama la adherencia* (o cerradura) *de* M, *y se denota por* $\bar{M}$. *Un subconjunto* $F \subset E$ *es cerrado si* $F = \bar{F}$.

En virtud del axioma (V3) se tiene siempre $M \subset \bar{M}$. Es claro que los puntos adherentes a M son los puntos interiores de M y los puntos frontera de M.

Proposición 1.5. *Para cualquier subconjunto* M *de un espacio topológico* E *se tiene* $\complement\bar{M} = (\complement M)^{\circ}$.

Demostración. Un punto $a \in E$ pertenece a $\complement\bar{M}$ si, y sólo si, es punto exterior de M, es decir, punto interior de $\complement M$. ◇

Proposición 1.6. *Un subconjunto* M *de un espacio topológico es cerrado si, y sólo si,* $\complement M$ *es abierto.*

Demostración. En virtud de la prop. 1.5 la relación $M = \bar{M}$ es equivalente a $\complement M = (\complement M)^{\circ}$. ◇

Proposición 1.7. *La adherencia* $\bar{M}$ *de cualquier subconjunto* M *de un espacio topológico es cerrada.*

Demostración. Según la prop. 1.5 se tiene $\complement\bar{M} = (\complement M)^{\circ}$. Ahora, en virtud de la prop. 1.2, el conjunto $(\complement M)^{\circ}$ es abierto, luego, en virtud de la prop. 1.6, el conjunto $\bar{M}$ es cerrado. ◇

Proposición 1.8. *La adherencia* $\bar{M}$ *de un conjunto* M *es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a* M.

Demostración. Sea F un conjunto cerrado que contiene M y x un punto adherente a M. Entonces x es, con más razón, adherente a F, y por consiguiente $x \in F$. De esta manera $\bar{M}$ está contenido en la intersección de los conjuntos cerrados que contienen a M.

Inversamente, sea x un punto que no adhiere a M. Entonces x es un punto interior de $\complement M$ y por lo tanto existe una vecindad abierta (prop. 1.3) V de x tal que $V \cap M = \emptyset$. El conjunto $F = \complement V$ es cerrado (prop. 1.6), contiene a M y no contiene a x. Esto demuestra que la intersección de los conjuntos cerrados que contienen a M está contenido en $\bar{M}$. ◇

Proposición 1.9. *Sea* E *un espacio topológico, y sea* $\mathcal{F}$ *la colección de todos los subconjuntos cerrados de* E.

(F1) *El subconjunto vacío de* E *y* E *mismo pertenecen a* $\mathcal{F}$.

(F2) *Si* F *y* G *son dos conjuntos que pertenecen a* $\mathcal{F}$, *entonces* $F \cup G$ *pertenece a* $\mathcal{F}$.

(F3) *Si* $(F_\iota)_{\iota\in I}$ *es una familia arbitraria de conjuntos de* $\mathcal{F}$, *entonces* $\bigcap_{\iota\in I} F_\iota$ *pertenece a* $\mathcal{F}$.

Demostración. Puesto que $\emptyset$ y E son conjuntos abiertos (prop. 1.1), en virtud de la prop. 1.6 sus complementarios E y $\emptyset$ son conjuntos cerrados.

Si F y G son dos conjuntos cerrados, en virtud de la prop. 1.6, los conjuntos $\complement F$ y $\complement G$ son abiertos, y por la prop. 1.1, el conjunto $\complement F \cap \complement G = \complement(F \cup G)$ es también abierto. Otra vez resulta de la prop. 1.6 que $F \cup G$ es cerrado.

Finalmente, si F_ι es cerrado, $\complement F_\iota$ es abierto (prop. 1.6), la unión $\bigcup_{\iota \in I} \complement F_\iota = \complement \bigcap_{\iota \in I} F_\iota$ es abierta (prop. 1.1), y $\bigcap_{\iota \in I} F_\iota$ es cerrado (prop. 1.6). ◇

Una topología sobre un conjunto E se puede definir si se da una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de E que satisfacen los axiomas (F1)-(F3), y se llama cerrados a los conjuntos que pertenecen a $\mathcal{F}$. En efecto, resulta de la demostración de la prop. 1.9 que si $\mathcal{A}$ es la colección de aquellos subconjuntos de E cuyo complemento pertenece a $\mathcal{F}$, entonces $\mathcal{A}$ verifica los axiomas (A1)-(A3). Se sabe por el teorema 1.1 que, considerando los conjuntos pertenecientes a $\mathcal{A}$ como abiertos, se obtiene una topología sobre E.

Ejemplo 1.7. Este ejemplo, que requiere conocimientos de álgebra abstracta, juega un papel fundamental en el desarrollo moderno de la geometría algebraica debido a A. Grothendieck. Sea A un anillo conmutativo con elemento unidad 1. Recuérdese (cf. la monografía de esta serie de Enzo R. Gentile, Estructuras algebraicas, p. 109) que un ideal $\mathfrak{p}$ de A es un ideal primo si $\mathfrak{p} \neq A$, y si cada vez que dos elementos a, b de A son tales que $ab \in \mathfrak{p}$, entonces $a \in \mathfrak{p}$ ó $b \in \mathfrak{p}$. Denótese por Spec(A) el conjunto de todos los ideales primos de A. Para un subconjunto M cualquiera de A sea V(M) el conjunto de todos los $\mathfrak{p} \in$ Spec(A) que contienen M. Es claro que $V(A) = \emptyset$ y $V(\{0\}) = \mathrm{Spec}(A)$. Sean M y M' dos subconjuntos de A. Si $\mathfrak{p} \supset M$ ó $\mathfrak{p} \supset M'$, entonces $\mathfrak{p} \supset MM'$, donde MM' es el conjunto de todos los productos mm', con $m \in M$ y $m \in M'$, puesto que $\mathfrak{p}$ es un ideal. Se tiene pues $V(M) \cup V(M') \subset V(MM')$. Inversamente, si $\mathfrak{p} \supset MM'$ y si, por ejemplo, $\mathfrak{p} \not\supset M$, entonces $\mathfrak{p}$ debe contener M', ya que de otra manera existirían $m \in M$, $m' \in M'$ tales que $m \notin \mathfrak{p}$, $m' \notin \mathfrak{p}$ y $mm' \in \mathfrak{p}$, en contradicción con el hecho de que $\mathfrak{p}$ es un ideal primo. De esta manera, se tiene también $V(MM') \subset V(M) \cup V(M')$, y por lo tanto, $V(M) \cup V(M') = V(MM')$. Finalmente, si $(M_\iota)_{\iota \in I}$ es una familia arbitraria de subconjuntos de A, se tiene obviamente $\bigcap_{\iota \in I} V(M_\iota) = V(\bigcup_{\iota \in I} M_\iota)$. Así, la colección $\mathcal{F}$ de todos los conjuntos de la forma V(M) satisface las condiciones (F1)-(F3) de la prop. 1.9 y por lo tanto define una topología sobre Spec(A), llamada la topología de Zariski.

Ejercicios

1) a) Demuéstrese que si K y L son dos subconjuntos compactos de un espacio métrico E, entonces $K \cup L$ es un subconjunto compacto de E.

b) Demuéstrese que las vecindades definidas en el ejemplo 1.3 satisfacen los axiomas (V1)-(V4).

2) Demuéstrese que las vecindades definidas en el ejemplo 1.4 satisfacen los axiomas (V1)-(V4).

3) Generalícense los ejercicios 3, 4, 5, 6 y 7 del cap. primero, § 2, a espacios topológicos.

§ 2. Funciones Continuas

Definición 2.1. *Sean* X *e* Y *dos espacios topológicos y* f *una función definida en* X, *con valores en* Y. *Se dice que* f *es continua en el punto* $x \in X$ *si, para cualquier vecindad* W *de* $f(x)$ *en* Y, *el conjunto* $f^{-1}(W)$ *es una vecindad de* x *en* X.

Proposición 2.1. *Sean* X *e* Y *dos espacios topológicos y* x *un punto de* X. *Una función* $f: X \to Y$ *es continua en el punto* x *si, y sólo si, para cada vecindad* W *de* $f(x)$ *en* Y *existe una vecindad* V *de* x *en* X *tal que* $f(V) \subset W$.

Demostración. Casi lo mismo que la prop. 1.5.1.

Proposición 2.2. *Sean* X, Y *y* Z *tres espacios topológicos,* f *una función definida en* X, *con valores en* Y, *y* g *una función definida en* Y, *con valores en* Z. *Si* f *es continua en* $x \in X$ *y* g *es continua en* $f(x) \in Y$, *entonces la función* $g \circ f: X \to Z$ *es continua en* x.

Demostración. Análoga a la de la prop. 1.5.4.

Definición 2.2. *Sean* X *e* Y *dos espacios topológicos. Se dice que una función* $f: X \to Y$ *es continua, o que* f *es continua sobre* X, *si es continua en cada punto de* X.

Proposición 2.3. *Sea* f *una función definida en un espacio topológico* X *y con valores en otro espacio topológico* Y. *Las condiciones siguientes son equivalentes:*

(a) f *es continua.*

(b) *Para cada conjunto abierto* A *de* Y *el conjunto* $f^{-1}(A)$ *es abierto en* X.

(c) *Para cada conjunto cerrado* F *de* Y *el conjunto* $f^{-1}(F)$ *es cerrado en* X.

Corolario. *Sea* f *una función definida en un espacio topológico* X *y con valores en la recta real* **R**. *Las condiciones siguientes son equivalentes:*

(a) *f es continua.*

(b') *Para cada número real* a *los conjuntos* $\{x \in X \mid f(x) < a\}$ *y* $\{x \in X \mid f(x) > a\}$ *son abiertos en* X.

(c') *Para cada número real* a *los conjuntos* $\{x \in X \mid f(x) \leqq a\}$ *y* $\{x \in X \mid f(x) \geqq a\}$ *son cerrados en* X.

Las demostraciones de la prop. 2.3 y del corolario son muy similares a las de la prop. 1.5.5 y de su corolario.

Proposición 2.4. *Sean* X *e* Y *dos espacios topológicos. Toda función constante que a todo* $x \in X$ *hace corresponder el mismo valor* $c \in Y$ *es continua sobre* X.

Demostración. La misma que la de la prop. 1.5.7.

Definición 2.3. *Sean* X *e* Y *dos espacios topológicos. Para cada punto* $x \in X$ *denótese por* $\mathcal{V}_X(x)$ *la colección de todas las vecindades de* x, *y de modo similar para cada* $y \in Y$ *sea* $\mathcal{V}_Y(y)$ *la colección de todas las vecindades de* y. *Una aplicación* $f : X \to Y$ *se llama un homeomorfismo si cumple las condiciones siguientes:*

(i) *f es biyectiva;*

(ii) *para cada* $x \in X$ *y* $V \in \mathcal{V}_X(x)$, *el conjunto* $f(V)$ *pertenece a* $\mathcal{V}_Y(f(x))$;

(iii) *para cada* $x \in X$ *y* $W \in \mathcal{V}_Y(f(x))$, *el conjunto* $f^{-1}(W)$ *pertenece a* $\mathcal{V}_X(x)$.

Las condiciones (ii) y (iii) se expresan más brevemente diciendo que para cada $x \in X$ la aplicación f transforma la colección $\mathcal{V}_X(x)$ exactamente en la colección $\mathcal{V}_Y(f(x))$.

Proposición 2.5. *Sean* X *e* Y *dos espacios topológicos y* f *una biyección de* X *sobre* Y. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *f es un homeomorfismo.*

(b) *f transforma la colección de todos los conjuntos abiertos de* X *exactamente en la colección de todos los conjuntos abiertos de* Y.

(c) *f transforma la colección de todos los conjuntos cerrados de* X *exactamente en la colección de todos los conjuntos cerrados de* Y.

(d) *La función f y su inversa f^{-1} son ambas continuas.*

Demostración. La condición (iii) de la def. 2.3 significa que f es continua, y la condición (ii) que f^{-1} es continua. De esta manera las condiciones (a) y (d) son equivalentes.

Supongamos ahora que f es un homeomorfismo y sea primero A un subconjunto abierto de X. Si $x \in A$, existe $V \in \mathcal{V}_X(x)$ tal que $V \subset A$, y por lo tanto $f(x) \in f(V) \subset f(A)$. Puesto que $f(V) \in \mathcal{V}_Y(f(x))$, resulta que $f(A)$ es abierto. Sea luego $f(A)$ un conjunto abierto en Y. Para cada $f(x) \in f(A)$ existe un $W \in \mathcal{V}_Y(f(x))$ tal que $W \subset f(A)$ y, por consiguiente, $x \in f^{-1}(W) \subset A$. Como $f^{-1}(W) \in \mathcal{V}_X(x)$, el conjunto A es abierto.

Inversamente, supóngase que f cumple (b). Si $V \in \mathcal{V}_X(x)$, en virtud de la prop. 1.3, existe un conjunto abierto A tal que $x \in A \subset$ $\subset V$, y por lo tanto, $f(x) \in f(A) \subset f(V)$. Puesto que $f(A)$ es abierto por hipótesis, de la prop. 1.3 se sigue que $f(V) \in \mathcal{V}_Y(f(x))$, es decir, se cumple la condición (ii) de la def. 2.3. Si $W \in \mathcal{V}_Y(f(x))$, en virtud de la prop. 1.3, existe un subconjunto abierto B de Y tal que $f(x) \in B \subset W$, y por lo tanto, $x \in f^{-1}(B) \subset f^{-1}(W)$. Puesto que $f^{-1}(B)$ es abierto por hipótesis, de la prop. 1.3 resulta que $f^{-1}(W) \in \mathcal{V}_X(x)$, es decir se cumple la condición (iii) de la def. 2.3. Así queda demostrada por completo la equivalencia de las condiciones (a) y (b).

106

Finalmente, la equivalencia de las condiciones (b) y (c) resulta de las relaciones $f(\complement_X A) = \complement_Y f(A)$, $f^{-1}(\complement_Y B) = \complement_X f^{-1}(B)$ y de la prop. 1.6. ◇

De la condición (d) de la prop. 2.5 resulta, en particular, que si la biyección $f: X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $f^{-1}: Y \to$ $\to X$ también lo es.

Definición 2.4. *Se dice que dos espacios topológicos* X *e* Y *son homeomorfos si existe un homeomorfismo* (def. 2.3) *de* X *sobre* Y.

Está claro que una isometría (def. 3.4.7) de un espacio métrico sobre otro es un homeomorfismo para las topologías definidas por las métricas respectivas (ejemplo 1.1), pero la proposición inversa no es necesariamente cierta.

Ejemplo 2.1. Sea X el espacio numérico $\mathbf{R}^p$ provisto de la distancia euclidiana $d_X(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{p} (x_j - y_j)^2\right)^{\frac{1}{2}}$, definida en la § 1 del cap. segundo. Por otra parte, sea Y el mismo conjunto $\mathbf{R}^p$, pero ahora la distancia de dos puntos $x, y \in \mathbf{R}^p$ se define por $d_Y(x, y) = \max_{1 \leq j \leq p} (|x_j - y_j|)$. Se deja a cargo del lector el verificar que la función d_Y es en efecto una métrica sobre $\mathbf{R}^p$ (ejercicio 2). La aplicación idéntica $x \mapsto x$ de X sobre Y es entonces un homeomorfismo. En efecto, si $V \in \mathcal{V}_X(x)$, entonces V contiene una bola $\{y \mid d_X(x, y) \leq \rho\}$. Con más razón, V contiene la bola $\{y \mid d_Y(x, y) \leq \frac{\rho}{\sqrt{p}}\}$, ya que, de $|x_j - y_j| \leq \frac{\rho}{\sqrt{p}}$, resulta $\sum_{j=1}^{p} (x_j - y_j)^2 \leq p \cdot \frac{\rho^2}{p} = \rho^2$.

Por consiguiente, se tiene $V \in \mathcal{V}_Y(x)$. Inversamente, si $V \in \mathcal{V}_Y(x)$, entonces V contiene una bola $\{y \mid d_Y(x, y) \leq \rho\}$ y, con más razón, la bola $\{y \mid d_X(x, y) \leq \rho\}$, de donde resulta que $V \in \mathcal{V}_X(x)$.

Este ejemplo muestra que métricas distintas pueden definir la misma topología.

Ahora vamos a comparar topologías distintas sobre un mismo conjunto.

Definición 2.5. *Sean $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ dos topologías sobre el mismo conjunto* E. *Para cada punto $x \in$ E denótese por $\mathcal{V}_j(x)$ la colección de todas las vecindades de x con respecto a la topología $\mathcal{T}_j$, $j = 1, 2$. Se dice que $\mathcal{T}_1$ es más fina que $\mathcal{T}_2$, o que $\mathcal{T}_2$ es menos fina que $\mathcal{T}_1$, si $\mathcal{V}_2(x) \subset \mathcal{V}_1(x)$ para cada $x \in$ E.* 107

Proposición 2.6. *Sean $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ dos topologías sobre el mismo conjunto* E. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *$\mathcal{T}_1$ es más fina que $\mathcal{T}_2$.*

(b) *Todo conjunto que es abierto para $\mathcal{T}_2$ también lo es para $\mathcal{T}_1$.*

(c) *Todo conjunto que es cerrado para $\mathcal{T}_2$ también lo es para $\mathcal{T}_1$.*

(d) *Sea E_j el conjunto E provisto de la topología $\mathcal{T}_j$, $j = 1, 2$. Entonces la aplicación idéntica $x \mapsto x$ de E_1 sobre E_2 es continua.*

Demostración. Las condiciones (a) y (d) son equivalentes, ya que cada una significa que, para todo $V \in \mathcal{V}_2(x)$, se tiene $V \in \mathcal{V}_1(x)$. Luego las condiciones (b), (c) y (d) son equivalentes en virtud de la prop. 2.3. ◇

Sea ahora $(\mathcal{T}_\iota)_{\iota \in I}$ una familia no vacía de topologías sobre el conjunto E y para cada $\iota \in$ I sea A_ι la colección de todos los subconjuntos abiertos de E con respecto a la topología $\mathcal{T}_\iota$. Es claro que la colección $\mathcal{A} = \bigcap_{\iota \in I} \mathcal{A}_\iota$ de subconjuntos de E satisface las condiciones (A1)-(A3) de la prop. 1.1, y desde luego define, en virtud del teorema 1.1, una topología $\mathcal{T}$ sobre E. Esta topología $\mathcal{T}$ tiene las dos propiedades siguientes:

(i) $\mathcal{T}$ es menos fina que cada $\mathcal{T}_\iota (\iota \in I)$,

(ii) si una topología $\mathcal{T}'$ es menos fina que cada $\mathcal{T}_\iota$, se sigue que $\mathcal{T}'$ es menos fina que $\mathcal{T}$.

En efecto, se tiene $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\iota$ para cada $\iota \in I$, luego $\mathcal{T}_\iota$ es más fina que $\mathcal{T}$ en virtud de la prop. 2.6. Además, si $\mathcal{A}'$ es la colección de subconjuntos abiertos de E con respecto a la topología $\mathcal{T}'$, y si $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}_\iota$ para cada $\iota \in I$, entonces $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ y, por lo tanto, $\mathcal{T}$ es más fina que $\mathcal{T}'$ (prop. 2.6). La topología $\mathcal{T}$ se llama el *extremo inferior* de las topologías $\mathcal{T}_\iota$, ya que las condiciones (i) y (ii) son análogas a las propiedades que definen el extremo inferior de un conjunto de números reales (cap. primero, § 1).

De manera semejante, existe una topología $\bar{\mathcal{T}}$ sobre E que es el *extremo superior* de las topologías $\mathcal{T}_\iota$, es decir, que satisface las condiciones siguientes:

(i) $\bar{\mathcal{T}}$ es más fina que cada $\mathcal{T}_\iota (\iota \in I)$,

(ii) si una topología $\mathcal{T}'$ es más fina que cada $\mathcal{T}_\iota$, se sigue que $\mathcal{T}'$ es más fina que $\bar{\mathcal{T}}$.

En efecto, sea Φ el conjunto de todas las topologías que son más finas que cada $\mathcal{T}_\iota$. El conjunto Φ no es vacío, ya que la topología discreta (ejemplo 1.5) seguramente le pertenece. Entonces el extremo inferior $\bar{\mathcal{T}}$ de las topologías que pertenecen a Φ verifica obviamente la condición (ii). Pero $\bar{\mathcal{T}}$ también verifica (i), ya que si $\mathcal{T}' \in \Phi$ y $\mathcal{A}'$ es la colección de los subconjuntos abiertos de E con respecto a la topología $\mathcal{T}'$, entonces $\mathcal{A}_\iota \subset \mathcal{A}'$ y, por lo tanto, $\mathcal{A}_\iota$ está contenido en la intersección de todos los $\mathcal{A}'$ cuando $\mathcal{T}'$ varía en Φ.

Ejemplo 2.2. Sobre un conjunto E cualquiera, la topología caótica (ejemplo 1.6) es el extremo inferior de todas las topologías sobre E, y la topología discreta (ejemplo 1.5) es el extremo superior de todas las topologías sobre E.

Ejercicios

1) Demuéstrense las proposiciones 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4.

2) Para cada vector $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbf{R}^p$ sea $|x|_\infty = \max\limits_{1 \leq j \leq p} (|x_j|)$.

a) Demuéstrese que la función $x \mapsto |x|_\infty$ sobre $\mathbf{R}^p$ verifica las condiciones (N1)-(N3) de la prop. 2.1.6.

b) Demuéstrese que la función d_∞, definida por $d_\infty(x, y) = |x - y|_\infty$, es una métrica sobre $\mathbf{R}^p$.

3) Para cada vector $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbf{R}^p$ sea $|x|_1 = \sum\limits_{j=1}^{p} |x_j|$.

a) Demuéstrese que la función $x \mapsto |x|_1$ sobre $\mathbf{R}^p$ verifica las condiciones (N1)-(N3) de la prop. 2.1.6.

b) Demuéstrese que la función d_1 definida por $d_1(x, y) = |x - y|_1$ es una métrica sobre $\mathbf{R}^p$.

c) Demuéstrese que la topología definida por la métrica d_1 sobre $\mathbf{R}^p$ es la misma que la topología definida por la métrica euclidiana.

4) Sea I un intervalo finito y cerrado de la recta real. Denótese por $\mathcal{T}_1$ la topología sobre $\mathcal{C}(\mathrm{I}; \mathbf{R})$ definida por la métrica introducida en el ejemplo 3.1.2, y denótese por $\mathcal{T}_2$ la topología débil sobre $\mathcal{C}(\mathrm{I}; \mathbf{R})$ definida en el ejemplo 1.4. Demuéstrese que $\mathcal{T}_1$ es más fina que $\mathcal{T}_2$. (Utilícese la desigualdad $\left|\int_a^b f(x) d\alpha(x)\right| \leq \|f\| \cdot \int_a^b d|\alpha|(x)$, donde $|\alpha|$ es la variación total de α.)

§ 3. Topología Inducida

Sea E un espacio topológico, X un subconjunto de E y j la inyección canónica $x \mapsto x$ de X en E. Entre las varias topologías que se pueden definir sobre X existen algunas para las cuales j es continua, ya que esto es seguramente el caso para la topología discreta (ejemplo 1.5) sobre X. Dicho con otras palabras, la colección Φ de las topologías sobre X para las cuales j es continua, no es vacía. Por lo tanto, Φ tiene un extremo inferior $\mathcal{T}$, como se vio en la § 2. Este extremo inferior $\mathcal{T}$ es la topología menos fina sobre X para la cual j es continua. En efecto, de la propiedad (i) del extremo inferior de una familia de topologías resulta que $\mathcal{T}$ es menos fina que cualquier topología para la cual j es continua. Basta entonces demostrar que $\mathcal{T}$ pertenece a Φ. Sea pues A un subconjunto abierto de E. Entonces $j^{-1}(A)$ es abierto en X para cada topología que pertenece a Φ, y de la manera como se definió

$\mathcal{T}$ en la § 2 resulta que $j^{-1}(A)$ es abierto para $\mathcal{T}$. Luego j es continua para $\mathcal{T}$ en virtud de la prop. 2.3.

Definición 3.1. *Sea E un espacio topológico y X un subconjunto de E. Se llama topología inducida sobre X por la topología de E la topología menos fina sobre X para la cual la inyección canónica $x \mapsto x$ de X en E es continua.*

Proposición 3.1. *Sea E un espacio topológico provisto de la topología $\mathcal{T}$, sea X un subconjunto de E, y denótese por $\mathcal{T}_X$ la topología inducida sobre X por $\mathcal{T}$.*

(a) *Un subconjunto V de X es una vecindad del punto $x \in X$ para $\mathcal{T}_X$ si, y sólo si, existe una vecindad U de x en E para $\mathcal{T}$ tal que* $V = U \cap X$.

(b) *Un subconjunto A de X es abierto con respecto a $\mathcal{T}_X$ si, y sólo si, existe un subconjunto B de E, abierto con respecto a $\mathcal{T}$, tal que* $A = B \cap X$.

(c) *Un subconjunto F de X es cerrado con respecto a $\mathcal{T}_X$, si, y sólo si, existe un subconjunto G de E, cerrado con respecto a $\mathcal{T}$, tal que* $F = G \cap X$.

Demostración. Sea $\mathcal{A}'$ la colección de todos los subconjuntos A de X para los cuales existe un subconjunto abierto B de E tal que $A = B \cap X$. De las fórmulas $\emptyset = \emptyset \cap X$, $X = E \cap X$, $(B_1 \cap X) \cap (B_2 \cap X) = (B_1 \cap B_2) \cap X$ y $\bigcup_{\iota \in I} (B_\iota \cap X) = (\bigcup_{\iota \in I} B_\iota) \cap X$ resulta que $\mathcal{A}'$ satisface los axiomas (A1)-(A3) de los conjuntos abiertos (prop. 1.1), y por lo tanto define una topología $\mathcal{T}'$ sobre X (teorema 1.1). Si j es la inyección canónica $x \mapsto x$ de X en E, entonces para todo subconjunto M de E se tiene $j^{-1}(M) = M \cap X$. La prop. 2.3 muestra entonces que j es continua para la topología $\mathcal{T}'$ sobre X, luego $\mathcal{T}'$ es más fina que $\mathcal{T}_X$. Por otra parte, sea $\mathcal{T}_0$ una topología sobre X para la cual j es continua. Si B es un subconjunto abierto de E, entonces $j^{-1}(B) = B \cap X$ es un subconjunto abierto de X con respecto a $\mathcal{T}_0$, es decir, $\mathcal{T}'$ es menos fina que $\mathcal{T}_0$. De la propiedad (ii) del extremo inferior de una familia de topologías resulta que $\mathcal{T}'$ es menos fina que $\mathcal{T}_X$, y por lo tanto, las topologías $\mathcal{T}_X$ y $\mathcal{T}'$ son las mismas. Así queda demostrada la afirmación (b) de la proposición.

La parte (c) de la proposición resulta de la (b) teniendo en cuenta la relación $\complement_X(B \cap X) = (\complement_E B) \cap X$ y la prop. 1.6.

Sea ahora $V \subset X$ una vecindad de $x \in X$ para $\mathcal{T}_X$. Entonces existe un conjunto $A \subset X$, abierto para $\mathcal{T}_X$, tal que $x \in A \subset V$ (prop.

1.3). En virtud de (b), se tiene $A = B \cap X$, donde B es un subconjunto abierto de E. Puesto que $x \in B$, el conjunto $U = B \cup V$ es una vecindad de x en E para $\mathcal{T}$ (prop. 1.3) tal que $U \cap X = (B \cup V) \cap X = (B \cap X) \cup (V \cap X) = A \cup V = V$.

Finalmente, sea U una vecindad de $x \in X$ en E para $\mathcal{T}$ y B un subconjunto abierto de E tal que $x \in B \subset U$ (prop. 1.3). Entonces $x \in B \cap X \subset U \cap X$, y puesto que $B \cap X$ es abierto para $\mathcal{T}_X$, en virtud de (b), el conjunto $U \cap X$ es una vecindad de x para $\mathcal{T}_X$. ◇

Corolario. *Sea* E *un espacio topológico provisto de la topología* $\mathcal{T}$, *sea* X *un subconjunto de* E, *y denótese por* $\mathcal{T}_X$ *la topología inducida sobre* X *por* $\mathcal{T}$.

(a) *Para que cada subconjunto de* X, *abierto con respecto a* $\mathcal{T}_X$, *sea también un subconjunto abierto de* E *con respecto a* $\mathcal{T}$, *es necesario y suficiente que* X *sea un subconjunto abierto de* E *con respecto a* $\mathcal{T}$.

(b) *Para que cada subconjunto de* X, *cerrado con respecto a* $\mathcal{T}_X$, *sea también un subconjunto cerrado de* E *con respecto a* $\mathcal{T}$ *es necesario y suficiente que* X *sea un subconjunto cerrado de* E *con respecto a* $\mathcal{T}$.

Demostración. (a) La condición es necesaria, ya que X es un subconjunto abierto de sí mismo con respecto a $\mathcal{T}_X$. La condición es suficiente, ya que si X es un subconjunto abierto de E, entonces para cada subconjunto abierto B de E el conjunto $A = B \cap X$ es abierto en E con respecto a $\mathcal{T}$. Pero en virtud de la parte (b) de la prop. 3.1, cada subconjunto abierto A de X con respecto a $\mathcal{T}_X$ es de esta forma.

(b) Es válida la misma demostración que se dio de (a) si bien reemplazando "abierto" por "cerrado", y utilizando la parte (c) de la prop. 3.1. ◇

Ejemplo 3.1. Sea E un espacio métrico y X un subconjunto de E. De las consideraciones de la sección 3 del capítulo tercero y de la prop. 3.1 (a) resulta que la topología sobre X definida por la métrica inducida sobre E es precisamente la topología inducida sobre X por la topología natural de E (ejemplo 1.1).

Proposición 3.2. *Sean* X *e* Y *dos espacios topológicos y* T *un subconjunto de* X *provisto de la topología inducida por la de* X. *Si la función* $f: X \to Y$ *es continua, entonces la restricción* $f|T$ *de* f *a* T *es continua también.*

Demostración. Sea A un subconjunto abierto de Y. Si f es continua, entonces $f^{-1}(A)$ es un subconjunto abierto de X (prop. 2.3). De la prop. 3.1 resulta que el conjunto $(f|T)^{-1}(A) = f^{-1}(A) \cap \cap T$ es abierto en T, y por lo tanto $f|T$ es continua (prop. 2.3). ◇

Ejercicios

1) Sea I un intervalo finito y cerrado de la recta real. Demuéstrese que la topología inducida sobre $\mathcal{C}(I;\mathbf{R})$ por la topología de la convergencia simple sobre $\mathcal{F}(I;\mathbf{R})$ (ejemplo 1.2) es menos fina que la topología débil sobre $\mathcal{C}(I;\mathbf{R})$ (ejemplo 1.4). (Recuérdese que si, por ejemplo, $t \in \mathring{I}$, y si α es la función definida por $\alpha(x) = 0$, si $x < t$, $\alpha(x) = 1$, si $x \geqq t$, entonces $\int_a^b f(x)d\alpha(x) = f(t)$, para $f \in \in \mathcal{C}(I;\mathbf{R})$.)

2) Sea X un conjunto, Y un espacio topológico y f una aplicación de X en Y.

a) Demuéstrese que existe una topología $\mathcal{T}$ sobre X, que es la menos fina de todas aquéllas para las cuales f es continua. Esta topología $\mathcal{T}$ se llama la imagen inversa de la topología de Y con respecto a f.

112

b) Demuéstrese que un subconjunto V de X es una vecindad del punto $x \in X$ para $\mathcal{T}$ si, y sólo si, existe una vecindad U de $f(x)$ en Y tal que $V \supset f^{-1}(U)$.

c) Demuéstrese que un subconjunto A (resp. F) de X es abierto (resp. cerrado) para $\mathcal{T}$ si, y sólo si, existe un subconjunto abierto B (resp. cerrado G) de Y tal que $A = f^{-1}(B)$ (resp. $F = = f^{-1}(G)$).

d) Demuéstrese que si X es un subconjunto de Y y f es la inyección canónica $x \mapsto x$, entonces $\mathcal{T}$ es la topología inducida sobre X por la topología de Y.

§ 4. Sucesiones Convergentes

Sea E un espacio topológico. En esta sección se considera la convergencia de sucesiones $(x_n)_{n \in N}$ de puntos de E, es decir, de funciones que a cada número natural $n \in \mathbf{N}$ hacen corresponder un punto x_n de E. Se verá que casi ninguna de las propiedades acostumbradas de sucesiones convergentes es válida en un espacio topológico general, y se verá también qué restricciones debe imponerse a E para que estas propiedades subsistan.

Ya la misma definición de una sucesión convergente adoptada en los capítulos anteriores (def. **2**. 4. 1) carece de sentido en un espacio topológico, mas por fortuna podemos valernos de la caracterización dada en la prop. **2**. 4. 1.

Definición 4. 1. *Sea* $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *una sucesión de puntos del espacio topológico* E. *Se dice que* (x_n) *converge o tiende hacia el punto* $x \in E$, *o que* x *es un límite de* (x_n), *si para cada vecindad* V *de* x *existe un número entero positivo* N(V) *tal que* $x_n \in V$ *para todo* $n \geqq N(V)$.

En el ejemplo que sigue se verá que una sucesión convergente ni siquiera tiene un límite único (cf. ejercicio 1 del cap. tercero, § 4).

Ejemplo 4. 1. Sea E un conjunto que consta de dos puntos a y b. Es claro que si se toma como subconjuntos abiertos los conjuntos E, $\{a\}$, $\emptyset$, éstos satisfacen los axiomas (A1)-(A3) de la prop. 1. 1, y por lo tanto definen una topología sobre E (teorema 1. 1). La sucesión (x_n) definida por $x_n = a$ para todo $n \in \mathbf{N}$ converge evidentemente hacia a, pero también converge hacia b, ya que E es la única vecindad de b.

Definición 4. 2. *Un espacio topológico* E *es un espacio de Hausdorff, o un espacio separado, si cumple la condición siguiente, llamada axioma de Hausdorff:*

(H) *Cualesquiera que sean los dos puntos distintos* a *y* b *de* E, *existe una vecindad* V *de* a *y una vecindad* W *de* b *tales que* $V \cap W = \emptyset$.

Ejemplo 4. 2. Todo espacio métrico, provisto de su topología natural, es separado. En efecto, sean a y b dos puntos del espacio métrico E y sea $d(a, b) = 3\rho > 0$. Entonces las bolas $V = B_\rho(a)$ y $W = B_\rho(b)$ son vecindades de a y b, respectivamente. Además, $V \cap W = \emptyset$, ya que si x fuera un elemento de $V \cap W$ se tendría $d(a, b) \leqq d(a, x) + d(x, b) \leqq \rho + \rho = 2\rho$, lo que es imposible.

Proposición 4. 1. *En un espacio de Hausdorff una sucesión converge a lo más hacia un límite..*

Demostración. Supóngase que (x_n) converge hacia los puntos a y b, y sea $a \neq b$. Sea V una vecindad de a y W una vecindad de b tales que $V \cap W = \emptyset$. Existe un número natural N(V) tal que $x_n \in V$ para $n \geqq N(V)$, y un número natural N(W) tal que $x_n \in W$ para $n \geqq N(W)$. En tales condiciones se tiene $x_n \in V \cap W$ para $n \geqq \max(N(V), N(W))$, lo que es imposible. ◇

Ejemplo 4.3. Sea E el conjunto de los números reales. Se puede definir sobre E una topología $\mathcal{T}$, distinta de la topología usual de $\mathbf{R}$ (cap. primero), de la manera siguiente: una vecindad de $x \in \in$ E para $\mathcal{T}$ se obtendrá de una vecindad usual de x quitándole un subconjunto finito o enumerable de puntos distintos de x. Una verificación fácil comprueba que las vecindades así definidas cumplen los axiomas (V1)-(V4) y definen, por lo tanto, una topología sobre E. Las únicas sucesiones convergentes para $\mathcal{T}$ son aquéllas para las cuales existe $x \in$ E y $N \in \mathbf{N}$ tales que $x_n = x$ si $n \geqq N$. En efecto, si (x_n) no cumple esta condición, entonces para cada $x \in$ E existen infinitos elementos x_n con $x_n \neq x$. Si V es una vecindad cualquiera de x, entonces el conjunto W, obtenido de V quitándole todos los puntos x_n con $x_n \neq x$, es todavía una vecindad de x. Pero para ningún $N \in \mathbf{N}$ se tiene $x_n \in$ W para $n \geqq N$.

En el espacio E no es válida la generalización de la prop. **2.4.2.** En efecto, el origen 0 es adherente al conjunto $M = \{x | x > 0\}$ de los números estrictamente positivos, ya que cada intervalo $[-a, a]$ con $a > 0$ contiene números estrictamente positivos en cantidad no enumerable. Pero, según lo dicho más arriba, ninguna sucesión de puntos de M converge hacia 0.

Tampoco es válida en E la generalización de la prop. **2.5.3.** En efecto, para cualquier espacio topológico X, toda función $f: E \to \to X$ satisface la condición de la proposición citada, ya que si (x_n) converge hacia x, entonces $x_n = x$ para $n \geqq N$, y $f(x_n) = f(x)$ para $n \geqq N$, es decir, $(f(x_n))$ converge hacia $f(x)$. Pero la función $f: E \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = -1$ si $x < 0$ y $f(x) = 1$ si $x \geqq 0$, no es continua, ya que el conjunto $\{-1\}$ es cerrado en $\mathbf{R}$, pero $f^{-1}(\{-1\}) = = \{x | x < 0\}$ no lo es en E.

Definición 4.3. *Sea* E *un espacio topológico y* x *un punto de* E. *Una colección* $\mathscr{S}(x)$ *de vecindades de* x *se llama un sistema fundamental de vecindades de* x *si cada vecindad* V *de* x *contiene un conjunto* $W \in \mathscr{S}(x)$.

Ejemplo 4.4. En un espacio métrico E, las bolas $B_\rho(x)$ con $\rho > 0$ forman un sistema fundamental de vecindades del punto $x \in$ E (def. **2.2.4**). También las bolas abiertas $O_\rho(x)$ forman un sistema fundamental de vecindades de x (prop. **2.2.1**). Como se vio en las demostraciones de las proposiciones **2.4.2** y **2.5.3**, las bolas $B_{1/n}(x)$, donde n recorre el conjunto de los números enteros estrictamente positivos, forman un sistema fundamental de vecindades de x (cf. observación **1.5.1**).

Ejemplo 4.5. Sobre la recta real los intervalos abiertos que contienen el punto x forman un sistema fundamental de vecindades de x (def. **1.2.4**).

Ejemplo 4. 6. Del ejemplo 2. 1 resulta que los "hipercubos" $\{y \mid \max_{1 \leq j \leq p} |x_j - y_j| \leq \rho\}$ forman un sistema fundamental de vecindades del punto $x = (x_1, \ldots, x_p)$ en $\mathbf{R}^p$.

Mostraremos ahora que la generalización de las proposiciones 2. 4. 2 y 2. 5. 3 es válida en espacios topológicos donde cada punto tiene un sistema fundamental de vecindades *enumerable*. Si esta condición se cumple, se dice a veces que el espacio topológico satisface al "primer axioma de enumerabilidad". El ejemplo 4. 4 muestra que éste es siempre el caso para un espacio métrico.

Proposición 4. 2. *Sea* E *un espacio topológico y* M *un subconjunto de* E.

(a) *Si existe una sucesión* (x_n) *de puntos de* M *que converja hacia el punto* $a \in$ E, *entonces* a *es adherente a* M.

(b) *Si* a *tiene un sistema fundamental de vecindades enumerable* $\mathscr{S}(a)$ *y si* a *es adherente a* M, *entonces existe una sucesión* (x_n) *de puntos de* M *que converge hacia* a.

Demostración. (a) Sea (x_n) una sucesión de puntos de M que converge hacia a. Entonces para cada vecindad V de a existe un $x_n \in$ M que pertenece a V (def. 4. 1), es decir a es adherente a M (def. 1. 4).

(b) Si $\mathscr{S}(a) = \{W_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ es un sistema fundamental de vecindades enumerable de a, entonces los conjuntos $U_n = \bigcap_{j=0}^{n} W_j$ forman también un sistema fundamental de vecindades enumerable de a, que satisface además la condición $U_n \supset U_{n+1}$ para cada $n \in \mathbf{N}$. Supóngase que a es adherente a M, y para cada $n \in \mathbf{N}$ sea x_n un punto que pertenece a $U_n \cap$ M. Una vecindad arbitraria V de a contiene una vecindad U_N y por lo tanto $x_n \in U_n \subset U_N \subset$ V para $n \geq$ N, es decir, (x_n) tiende hacia a. ◇

Proposición 4. 3. *Sean* X *e* Y *dos espacios topológicos, y* f *una función definida en* X *con valores en* Y.

(a) *Si* f *es continua en el punto* $x \in$ X, *entonces para toda sucesión* (x_n) *de puntos de* X *que converja hacia* x *la sucesión* $(f(x_n))$ *converge hacia* $f(x)$.

(b) *Si el punto* $x \in$ X *tiene un sistema fundamental de vecindades enumerable* $\mathscr{S}(x)$ *y si para cada sucesión* (x_n) *de puntos de* X *que converja hacia* x, *la sucesión* $(f(x_n))$ *converge hacia* $f(x)$, *entonces* f *es continua en* x.

Demostración. (a) Supóngase que f es continua en x, y sea W una vecindad de $f(x)$. Entonces $f^{-1}(W)$ es una vecindad de x (def. 2.1), y si (x_n) es una sucesión que converge hacia x existe $N \in \mathbf{N}$ tal que $x_n \in f^{-1}(W)$ para $n \geqq N$. Por consiguiente, $f(x_n) \in W$ para $n \geqq N$, es decir, $(f(x_n))$ converge hacia $f(x)$.

(b) Si x tiene un sistema fundamental de vecindades enumerable $\mathscr{I}(x) = \{U_n | n \in \mathbf{N}\}$, se puede suponer que $U_n \supset U_{n+1}$ para $n \in \mathbf{N}$, como se vio en la demostración de la prop. 4.2 (b). Supóngase que f no es continua en x, y sea W una vecindad de $f(x)$ tal que $f^{-1}(W)$ no es vecindad de x. Para todo $n \in \mathbf{N}$, sea x_n un punto de U_n que no pertenece a $f^{-1}(W)$. Dada una vecindad V de x, existe una vecindad U_N tal que $U_N \subset V$, y por lo tanto, $x_n \in U_n \subset U_N \subset V$ para $n \geqq N$, es decir, (x_n) tiende hacia x. Por otra parte $f(x_n) \notin W$ para todo n, es decir, $(f(x_n))$ no tiende hacia $f(x)$. ◇

Definición 4.4. *Un subconjunto* D *de un espacio topológico* E *es denso en* E *si la adherencia* $\bar{D}$ *de* D *es igual a* E. *Se dice que un espacio topológico* E *es separable si existe un subconjunto enumerable, denso en* E.

Proposición 4.4. *Sea* E *un espacio topológico y* D *un subconjunto de* E. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) D *es denso en* E.

(b) *Cualquiera que sea el punto* $x \in E$, *para cada vecindad* V *de* x, *se tiene* $V \cap D \neq \emptyset$.

(c) *Para cada subconjunto abierto no vacío* A *de* E *se tiene* $A \cap$ $\cap D \neq \emptyset$.

La demostración es palabra por palabra (salvo las referencias) la misma que la de la prop. 3.4.3.

Definición 4.5. *Se dice que un espacio topológico* E *es de tipo enumerable* (o que satisface al segundo axioma de enumerabilidad) *si existe una sucesión* $(O_n)_{n \in N}$ *de subconjuntos abiertos de* E *tal que cada subconjunto abierto de* E *es la reunión de una subfamilia finita o infinita de* (O_n).

Proposición 4.5. *Cada espacio topológico de tipo enumerable es separable.*

Demostración. Sea E un espacio topológico de tipo enumerable y sea $(O_n)_{n \in N}$ una sucesión de subconjuntos abiertos de E que satisface la condición de la def. 4.5. Podemos obviamente suponer que ninguno de los conjuntos 0_n es vacío. Para cada $n \in \mathbf{N}$, sea x_n un punto de 0_n. Entonces el conjunto D de todos los puntos x_n es enumerable, y D es denso en E, en virtud de la prop. 4.4, ya que cada conjunto abierto no vacío contiene por lo menos un conjunto 0_n, y por lo tanto, un punto x_n. ◇

Se conocen ejemplos de espacios topológicos separables tales que cada punto tiene un sistema fundamental de vecindades (def. 4.3) enumerable, que no son de tipo enumerable (véase, p. ej., Bourbaki, Topología General, cap. IX, 2ª ed., § 2, ejerc. 13).

Ejercicios

1) Los ideales primos del anillo $\mathbf{Z}$ de los números enteros son los ideales (p) generados por un número primo $p(p = 2, 3, 5, 7, \ldots)$, y el ideal (0). Demuéstrese que la adherencia en Spec($\mathbf{Z}$) (ejemplo 1.7) del subconjunto que consta del único punto (0) es todo el espacio Spec($\mathbf{Z}$), y que, en particular, Spec($\mathbf{Z}$) no es un espacio de Hausdorff.

2) Sea M un conjunto y E un espacio métrico. Demuéstrese que una sucesión (f_n) de elementos de $\mathcal{F}(M;E)$ (ejemplo 1.2) converge hacia $f \in \mathcal{F}(M;E)$ si, y sólo si, para cada $x \in M$ la sucesión $(f_n(x))$ de elementos de E converge hacia $f(x)$. 117

3) Sea M un conjunto y E un espacio métrico. Se dice que una sucesión (f_n) de funciones $f_n : M \to E$ converge uniformemente sobre M hacia la función $f : M \to E$ si, para cada número $\epsilon > 0$, existe un número entero $N(\epsilon)$ tal que $d(f(x), f_n(x)) \leqq \epsilon$ si $n \geqq N(\epsilon)$ y $x \in M$.

Demuéstrese que una sucesión (f_n) de elementos de $\mathcal{C}(A;\mathbf{R}^p)$ converge hacia $f \in \mathcal{C}(A;\mathbf{R}^p)$ en la topología definida en el ejemplo 1.3 si, y sólo si, para todo subconjunto compacto K de A la sucesión $(f_n|K)$ de las restricciones de las f_n a K converge uniformemente sobre K hacia $f|K$.

4) Demuéstrese que las vecindades definidas en el ejemplo 4.3 satisfacen los axiomas (V1)-(V4).

5) Demuéstrese que si E es un espacio topológico, las vecindades abiertas de un punto $x \in E$ forman un sistema fundamental de vecindades de x.

6) a) Demuéstrese que si E es un espacio topológico de tipo enumerable, entonces cada punto de E tiene un sistema fundamental de vecindades enumerable.

b) Dése un ejemplo de un espacio topológico en que cada punto tenga un sistema fundamental de vecindades enumerable, pero que no sea de tipo enumerable.

7) Se dice que un espacio topológico E es un espacio de Lindelöf si para cada recubrimiento $(A_\iota)_{\iota \in I}$ de E por conjuntos abiertos A_ι existe una subfamilia enumerable (A_{ι_n}) que cubre E. Demuéstrese que cada espacio topológico de tipo enumerable es un espacio de Lindelöf.

8) Sea E un espacio topológico cada uno de cuyos puntos tiene un sistema fundamental de vecindades enumerable. Demuéstrese que un subconjunto D de E es denso en E si, y sólo si, para cada $x \in E$ existe una sucesión (y_n) de puntos de D que converja hacia x.

§ 5. Espacios Compactos

En un espacio topológico general las condiciones (i)-(v) de la prop. 3.6.1 ya no son equivalentes y por lo tanto se definirán tres nociones diferentes de compacidad.

Definición 5.1. *Se dice que un espacio topológico* E *es compacto si es separado* (def. 4.2) *y si para cada recubrimiento* $(A_\iota)_{\iota \in I}$ *de* E *por conjuntos abiertos* A_ι *existe una subfamilia finita* $A_{\iota_1}, \dots, A_{\iota_n}$ *que cubre* E. *Se dice que un subconjunto* K *de un espacio topológico es compacto si, provisto de la topología inducida* (def. 3.1), *es un espacio compacto.*

Definición 5.2. *Se dice que un espacio topológico* E *es secuencialmente compacto si es separado* (def. 4.2) *y si cada sucesión de puntos de* E *tiene una subsucesión convergente. Se dice que un subconjunto* K *de un espacio topológico es secuencialmente compacto si provisto de la topología inducida* (def. 3.1) *es un espacio secuencialmente compacto.*

Definición 5.3. *Se dice que un espacio topológico* E *es enumerablemente compacto* (o semicompacto) *si es separado* (def. 4.2) *y si para cada recubrimiento enumerable* $(A_n)_{n \in N}$ *de* E *por conjuntos abiertos* A_n *existe una subfamilia finita* $A_{n_1}, \dots, A_{n_m}$ *que cubre* E. *Se dice que un subconjunto* K *de un espacio topológico es enumerablemente compacto si, provisto de la topología inducida* (def. 3.1), *es un espacio enumerablemente compacto.*

En vista de las consideraciones hechas en capítulos anteriores, la demostración de las dos proposiciones que siguen debe ser evidente.

Proposición 5.1. *Sea* E *un espacio de Hausdorff* (def. 4.2). *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) E *es compacto.*

(ii) *Para cada familia* $(F_\iota)_{\iota \in I}$ *de conjuntos cerrados* F_ι *tal que* $\bigcap_{\iota \in I} F_\iota = \emptyset$ *existe una subfamilia finita* $F_{\iota_1}, \ldots, F_{\iota_m}$ *tal que* $\bigcap_{k=1}^{m} F_{\iota_k} = \emptyset$.

Proposición 5.2. *Sea* E *un espacio de Hausdorff* (def. 4.2). *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) E *es enumerablemente compacto.*

(ii) *Para cada familia enumerable* $(F_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *de conjuntos cerrados* F_n *tal que* $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} F_n = \emptyset$ *existe una subfamilia finita* $F_{n_1}, \ldots, F_{n_m}$ *tal que* $\bigcap_{k=1}^{m} F_{n_k} = \emptyset$.

(iii) *Para cualquier sucesión* $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *de subconjuntos abiertos de* E *tal que* $A_n \subset A_{n+1}$, *para* $n \in \mathbf{N}$ *y* $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n = E$, *existe un índice* $s \in \mathbf{N}$ *tal que* $A_s = E$.

(iv) *Para cualquier sucesión* $(F_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *de subconjuntos cerrados de* E *tal que* $F_n \supset F_{n+1}$, *para* $n \in \mathbf{N}$ *y* $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} F_n = \emptyset$, *existe un índice* $s \in \mathbf{N}$ *tal que* $F_s = \emptyset$.

Ahora examinaremos las relaciones entre los tres tipos de compacidad.

Proposición 5.3. *Todo espacio topológico compacto es enumerablemente compacto.*

Esto es evidente en virtud de las definiciones.

Proposición 5.4. *Todo espacio topológico secuencialmente compacto es enumerablemente compacto.*

Demostración. Sea E un espacio secuencialmente compacto y $(F_n)_{n \in \mathbf{N}}$ una sucesión de subconjuntos no vacíos cerrados de E tal que $F_n \supset F_{n+1}$ para $n \in \mathbf{N}$. En virtud de la prop. 5.2, basta demostrar que entonces $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} F_n \neq \emptyset$. Para todo $n \in \mathbf{N}$, sea x_n un punto de F_n. Por hipótesis, la sucesión (x_n) tiene una subsucesión (x_{n_k}) que converge hacia un punto $x \in E$. Puesto que x_{n_k} pertenece a F_n para $n_k \geqq n$, el punto x es adherente a F_n (prop. 4.2 (a)). Ahora bien, F_n es cerrado, por lo tanto $x \in F_n$ y, finalmente, $x \in \bigcap_{n \in N} F_n$. ◇

Se puede mostrar con ejemplos que en un espacio de Hausdorff general no hay otras implicaciones entre las tres nociones de compacidad.

Proposición 5.5. *Si* E *es un espacio topológico enumerablemente compacto en que cada punto tiene un sistema fundamental de vecindades* (def. 4.3) *enumerable, entonces* E *es secuencialmente compacto.*

Demostración. Sea (x_n) una sucesión de puntos de E, y para cada número $n \in \mathbf{N}$ sea F_n la adherencia del conjunto $\{x_m | m \geqq n\}$. Es claro que $F_n \supset F_{n+1}$ para $n \in \mathbf{N}$, y cada F_n es cerrado en virtud de la prop. 1.7. Puesto que ningún conjunto F_n es vacío, existe un punto $x \in \bigcap_{n \in N} F_n$. Sea $\mathscr{U}(x) = \{U_n | n \in \mathbf{N}\}$ un sistema fundamental de vecindades enumerable de x tal que $U_n \supset U_{n+1}$ para $n \in \mathbf{N}$ (cf. la demostración de la prop. 4.2 (b)). Defínase por inducción completa una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) tal que $x_{n_k} \in U_k$ para $k \in \mathbf{N}$. Puesto que $x \in F_0$, la vecindad U_0 intersecta el conjunto $\{x_m | m \in \mathbf{N}\}$. Sea entonces x_{n_0} un elemento tal que $x_{n_0} \in U_0$. Supóngase ahora que los elementos x_{n_j}, con $0 \leqq j < k$, se han definido ya. Como x es adherente al conjunto $\{x_n | n \geqq n_{k-1} + 1\}$, se puede encontrar un índice $n_k > n_{k-1}$ tal que $x_{n_k} \in U_k$.

Una vecindad arbitraria V de x contiene una vecindad U_N y por lo tanto $x_{n_k} \in U_k \subset U_N \subset V$ para $k \geqq N$, es decir, $(x_{n_k})_{k \in N}$ converge hacia x. ◇

Se deja a cargo del lector el demostrar que si E es un espacio topológico de tipo enumerable (def. 4.5), enumerablemente compacto, entonces E es compacto (ejerc. 3 y ejerc. 7 de la § 4). Así, en un espacio de Hausdorff de tipo enumerable, las tres nociones de compacidad coinciden (cf. ejerc. 6) a) de la § 4). La mayor parte del esfuerzo en la demostración de la prop. 3.6.1 consistió en hacer ver que si un espacio métrico es, bien enumerablemente compacto, o bien secuencialmente compacto, entonces es de tipo enumerable.

Proposición 5.6. *Un subconjunto cerrado de un espacio topológico compacto es compacto.*

Demostración. Sea K un subconjunto cerrado del espacio compacto E y $(F_\iota)_{\iota \in I}$ una familia de subconjuntos cerrados de K tal que $\bigcap_{\iota \in I} F_\iota = \emptyset$. En virtud del corolario de la prop. 3.1, cada F_ι es también un subconjunto cerrado de E y, por lo tanto, existe una subfamilia finita $F_{\iota_1}, \ldots, F_{\iota_n}$ tal que $\bigcap_{k=1}^{n} F_{\iota_k} = \emptyset$ (prop. 5.1). ◇

Proposición 5.7. *Un subconjunto compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado.*

Demostración. Demostremos, en primer lugar, que si x es un punto de un espacio de Hausdorff E, entonces la intersección de todas las vecindades cerradas de x es el conjunto $\{x\}$. En efecto, sea y un punto de E distinto de x. Por hipótesis, existe una vecindad V de x y una vecindad W de y tales que $V \cap W = \emptyset$. Entonces el interior $\mathring{W}$ de W es también una vecindad de y (cf. ejerc. 5 de la § 4). Por lo tanto, la adherencia $\bar{V}$ de V está contenida en $\complement \mathring{W}$, es decir $\bar{V}$ es una vecindad cerrada de x que no contiene y.

Sea ahora x un punto adherente al subconjunto compacto K del espacio de Hausdorff E y $(V_\iota)_{\iota \in I}$ la familia de todas las vecindades cerradas de x. Poniendo $F_\iota = V_\iota \cap K$ para todo $\iota \in I$ se obtiene una familia (F_ι) de subconjuntos cerrados de K. Si el conjunto $\bigcap_{\iota \in I} F_\iota$ fuera vacío, existiría una subfamilia finita $F_{\iota_1}, \ldots, F_{\iota_n}$ tal que $\bigcap_{k=1}^{n} F_{\iota_k} = \emptyset$, es decir, $\left(\bigcap_{k=1}^{n} V_{\iota_k}\right) \cap K = \emptyset$, pero esto es imposible, ya que $\bigcap_{k=1}^{n} V_{\iota_k}$ es una vecindad de x. De esta manera, $\bigcap_{\iota \in I} F_\iota$ no es vacío, pero, en virtud de la primera parte de la demostración, el único punto que puede contener es x. Por lo tanto $x \in \bigcap_{\iota \in I} F_\iota \subset K$, es decir, K es cerrado. ◇

Proposición 5.8. *Sea* X *un espacio topológico,* Y *un espacio de Hausdorff y* $f: X \to Y$ *una aplicación continua.*

(a) *Si* K *es un subconjunto compacto de* X, *entonces* $f(K)$ *es un subconjunto compacto de* Y.

(b) *Si* K *es un subconjunto enumerablemente compacto de* X, *entonces* $f(K)$ *es un subconjunto enumerablemente compacto de* Y.

Demostración. (a) Puesto que Y es un espacio de Hausdorff, el conjunto $f(K)$ provisto de la topología inducida lo es también. Sea $(A_\iota)_{\iota \in I}$ una familia de subconjuntos abiertos de Y tal que $f(K) \subset \bigcup_{\iota \in I} A_\iota$. Entonces $(f^{-1}(A_\iota))$ es una familia de subconjuntos abiertos (prop. 2.3) de X tal que $K \subset \bigcup_{\iota \in I} f^{-1}(A_\iota)$. Existe pues una subfamilia finita $A_{t_1}, \ldots, A_{t_n}$ tal que $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(A_{t_k})$ y, por lo tanto, $f(K) \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_{t_k}$.

(b) La demostración es la misma que de la parte (a) con sólo reemplazar la familia $(A_t)_{t\in I}$ por una familia enumerable $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$. ◇

Teorema 5. 1. *Toda función continua definida en un espacio topológico enumerablemente compacto y con valores en un espacio métrico es acotada.*

Demostración. Si f es una aplicación continua definida sobre el espacio enumerablemente compacto K y con valores en el espacio métrico Y, entonces $f(K)$ es enumerablemente compacto en Y (prop. 5. 8 (b)), es decir, compacto (prop. **3**. 6. 1), y, por lo tanto, acotado (prop. **3**. 6. 2). ◇

Con más razón es acotada (prop. 5. 3) una función continua definida sobre un espacio compacto.

Teorema 5. 2. *Sea f una función continua definida en un espacio topológico enumerablemente compacto* K *y con valores en la recta real* **R**. *Entonces existe un punto* $\xi \in K$ *tal que* $f(\xi) \geqq f(x)$ *para todo* $x \in K$, *y un punto* $\eta \in K$ *tal que* $f(\eta) \leqq f(x)$ *para todo* $x \in K$.

Demostración. El conjunto $f(K)$ es enumerablemente compacto (prop. 5. 8 (b)) y, por lo tanto, compacto (prop. **3**. 6. 1 o prop. **1**. 6. 2), es decir, acotado y cerrado (prop. **1**. 6. 4). Por consiguiente, el extremo superior M de $f(K)$, que existe en virtud del axioma (Co) del cap. primero, § 1, y que es adherente a $f(K)$ en virtud de la prop. 1. 6 (ii'), pertenece a $f(K)$. Tomando $\xi \in K$ tal que $f(\xi) = M$, se obtiene el punto ξ buscado.

De la prop. 1. 5. 9 y de la prop. 2. 2 resulta que la función $x \mapsto -f(x)$ es continua; luego la primera parte de la demostración muestra que existe $\eta \in K$ tal que $-f(\eta) \geqq -f(x)$, es decir $f(\eta) \leqq f(x)$ para todo $x \in K$. ◇

El teorema 5. 2 se suele enunciar diciendo que una función numérica continua definida en un espacio enumerablemente compacto (y, con más razón, en un espacio compacto) alcanza sus extremos.

Ejercicios

1) Demuéstrense las proposiciones 5. 1 y 5. 2.

2) a) Demuéstrese que un espacio de Hausdorff E es enumerablemente compacto si, y sólo si, toda sucesión de puntos de E tiene un punto de acumulación (cap. tercero, § 4, ejerc. 2).

b) Demuéstrese que si E es un espacio topológico donde todo punto tiene un sistema fundamental de vecindades enumerable, y $x \in$ E es punto de acumulación de la sucesión (x_n), entonces existe una subsucesión de (x_n) que converge hacia x.

c) Dedúzcase de a) y b) otra demostración de la prop. 5.5.

3) Demuéstrese que E es compacto si es a la vez un espacio de Hausdorff enumerablemente compacto y un espacio de Lindelöf (§ 4, ejerc. 7). (Utilícese el razonamiento seguido para demostrar la implicación (iii)⇒(i) en la última parte de la demostración de la prop. 3.6.1.)

4) a) Demuéstrese que en cualquier espacio topológico un subconjunto que consta de un solo punto es compacto.

b) Demuéstrese que el subconjunto $\{a\}$ del espacio E considerado en el ejemplo 4.1 es compacto, pero no cerrado.

5) Demuéstrese que si para todo punto x de un espacio topológico E la intersección de todas las vecindades cerradas de x es $\{x\}$, entonces E es un espacio de Hausdorff.

6) Sea X un espacio topológico, Y un espacio de Hausdorff y $f: X \to Y$ una aplicación continua. Demuéstrese que si K es un subconjunto secuencialmente compacto de X, entonces $f(K)$ es un subconjunto secuencialmente compacto de Y. (Utilícese la prop. 4.3 (a).)

§ 6. Espacios Conexos

Para terminar, se considerará otra vez el importante concepto de conexión estudiado en la § 7 del cap. primero, que se omitió en los capítulos segundo y tercero para mayor brevedad y para evitar excesivas repeticiones.

Definición 6.1. *Un espacio topológico* E *es conexo si siempre que* A *y* B *son dos subconjuntos abiertos de* E *tales que* $A \cup B = E$ *y* $A \cap B = \emptyset$, *entonces uno de dichos conjuntos* A *o* B *tiene que ser vacío. Se dice que un subconjunto de un espacio topológico es conexo si, provisto de la topología inducida* (def. 3.1), *es un espacio conexo.*

Las dos proposiciones que siguen se demuestran exactamente como las 1.7.1 y 1.7.2 relativas a la recta real.

Proposición 6.1. *Sea* E *un espacio topológico. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) E *es conexo.*

(b) *Siempre que* F *y* G *sean dos subconjuntos cerrados de* E *tales que* $F \cup G = E$ *y* $F \cap G = \emptyset$, *entonces uno de los dos conjuntos* F *o* G *es vacío.*

(c) *Los únicos subconjuntos de* E *que son al mismo tiempo abiertos y cerrados son* $\emptyset$ *y* E.

Proposición 6.2. *La reunión de una familia* $(X_\iota)_{\iota \in I}$ *de subconjuntos conexos de un espacio topológico que tiene un punto* x *en común es conexa.*

Exactamente como en el cap. primero, § 7, resulta de la prop. 6.2 que, dado un punto x de un espacio topológico E, la unión de todos los subconjuntos conexos de E que contienen a x es un subconjunto conexo, y esta reunión es el mayor subconjunto conexo de E que contiene a x. Esto conduce a la definición siguiente.

Definición 6.2. *Sea* x *un punto del espacio topológico* E. *El componente conexo de* x *es el mayor subconjunto conexo de* E *que contiene a* x. *Se llaman componentes conexos de un subconjunto* M *de* E *los componentes conexos de los puntos de* M *con respecto al espacio topológico* M, *provisto de la topología inducida* (def. 3.1).

De la prop. 6.2 resulta que si x e y son dos puntos de M, entonces los componentes conexos de x e y en M, o bien coinciden, o bien son disjuntos. Por consiguiente, M es la reunión de una colección de subconjuntos conexos, disjuntos dos a dos, a saber, los componentes conexos de M.

Definición 6.3. *Se dice que el espacio topológico* E *es localmente conexo, si cada punto de* E *tiene un sistema fundamental de vecindades* (def. 4.3) *que consta de conjuntos conexos.*

Ejemplo 6.1. La recta real **R** es un espacio localmente conexo, ya que los intervalos abiertos que contienen el punto $x \in \mathbf{R}$ forman un sistema fundamental de vecindades de x (ejemplo 4.5) y cada intervalo es conexo (teorema 1.7.1).

El resultado siguiente generaliza la prop. 1.7.3:

Proposición 6.3. *En un espacio localmente conexo cada componente conexo de un conjunto abierto es un conjunto abierto.*

Demostración. Sea A un subconjunto abierto del espacio localmente conexo E, B un componente conexo de A, y x un punto de B. Por hipótesis existe una vecindad conexa V de x contenida en A. Pero B contiene todo conjunto conexo que contenga x, luego $V \subset B$ y, por lo tanto, B es abierto. ◇

Corolario. *Todo subconjunto abierto de un espacio topológico localmente conexo es la reunión de una colección de conjuntos abiertos, conexos y disjuntos dos a dos.*

Proposición 6.4. *Sean* X *e* Y *dos espacios topológicos y* $f: X \to Y$ *una aplicación continua. Si* M *es un subconjunto conexo de* X, *entonces* $f(M)$ *es un subconjunto conexo de* Y.

Demostración. Sean A y B dos subconjuntos abiertos y disjuntos de Y tales que $A \cup B \supset f(M)$. En virtud de la prop. 2.3, los conjuntos $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son abiertos en X. Como, además, $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$ y $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \supset M$, si M es conexo, uno de los dos conjuntos $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ debe ser disjunto de M. Si, por ejemplo, $f^{-1}(A) \cap M = \emptyset$, entonces $A \cap f(M) = \emptyset$ y, por consiguiente, $f(M)$ es conexo. ◇

Teorema 6.1. *Sea f una función continua definida en un espacio topológico* E *y con valores en la recta real* **R**. *Si a y b son dos puntos de* E, *y* C *un número real entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces en cada conjunto conexo que contiene a y b existe un punto c tal que* $f(c) = C$.

Demostración. Si M es un conjunto conexo que contiene los puntos a y b, entonces $f(M)$ es un subconjunto conexo de **R** (prop. 6.4), es decir, un intervalo (teorema 1.7.1). Puesto que $f(M)$ contiene los números $f(a)$ y $f(b)$, también contiene el número C (lema 1.7.1). ◇

Ejemplo 6.2. Cada bola $B_\rho(x)$ del espacio euclidiano $\mathbf{R}^p$ es un conjunto conexo. En primer lugar, demostremos que los puntos z de $B_\rho(x)$ son aquéllos que se pueden escribir en la forma $z = x + t(y - x) = (1 - t)x + ty$, donde $-1 \leqq t \leqq 1$, e y es un punto de la esfera $S_\rho(x)$ (def. 2.2.3). En efecto, si z es de la forma indicada se tiene $|z - x| = |t| \cdot |y - x| \leqq \rho$. Inversamente, si $z \in B_\rho(x)$ y $z \neq x$, poniendo $y = x + \rho \frac{z - x}{|z - x|}$ y $t = \frac{|z - x|}{\rho}$ obtenemos $|y - x| = \rho$,

$0 < t \leqq 1$ y $z = x + t(y - x)$. Como para $z = x$ la representación es evidente, queda demostrada la afirmación.

Ahora bien, para x e y fijos el conjunto

$$(1) \qquad \{z \mid z = x + t(y - x), \ -1 \leqq t \leqq 1\}$$

es la imagen del intervalo $[-1, 1]$ de la recta real con respecto a la aplicación $t \mapsto x + t(y - x)$. En virtud del corolario 2 del teorema **2.5.3** y del corolario 2 del teorema **2.5.4**, esta aplicación es continua y, desde luego, el conjunto (1) es conexo (prop. 6.4). Como $B_\rho(x)$ es la reunión de los conjuntos (1) cuando y varía en $S_\rho(x)$, y como cada conjunto (1) contiene el punto x, de la prop. 6.2 resulta que $B_\rho(x)$ es conexo.

En particular, el espacio $\mathbf{R}^p$ es localmente conexo.

Ejemplo 6.3. En un espacio ultramétrico, los únicos subconjuntos conexos no vacíos son aquéllos que contienen un solo punto. En efecto, sea M un subconjunto del espacio ultramétrico E que contiene dos puntos x, y, con $x \neq y$. Existe una bola $B_\rho(x)$ que no contiene y (ejemplo 4.2) y $B_\rho(x)$ es, al mismo tiempo, un subcon-
126 junto abierto y cerrado de E (cap. tercero, § 2). Así, $A = B_\rho(x)$ y $B = \complement B_\rho(x)$ son dos subconjuntos abiertos de E tales que $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = E \supset M$, pero ninguno es vacío, ya que $x \in A$ e $y \in B$.

En particular, un espacio ultramétrico no discreto no es localmente conexo.

Ejercicios

1) Demuéstrense las proposiciones 6.1 y 6.2.

2) a) Demuéstrese que si A es un subconjunto conexo de un espacio topológico E, entonces la adherencia $\bar{A}$ de A es un conjunto conexo.

b) Demuéstrese que el componente conexo de un punto $x \in E$ es un conjunto cerrado.

3) Demuéstrese que si en un espacio topológico todo componente conexo de cada conjunto abierto es abierto, entonces el espacio es localmente conexo.

4) Demuéstrese que en un espacio topológico localmente conexo separable todo conjunto abierto es la reunión de una colección enumerable de conjuntos abiertos, conexos y disjuntos dos a dos.

5) Demuéstrese que en el conjunto $\mathbf{Q}$ de los números racionales, provisto de la topología inducida por $\mathbf{R}$, los únicos subconjuntos conexos no vacíos son aquéllos que consisten de un solo punto.

APENDICE

ALGUNOS TEMAS ADICIONALES

En los cuatro capítulos anteriores se han presentado los conceptos básicos de la topología general, que se obtienen generalizando las ideas adquiridas en el estudio de las funciones continuas en los cursos de cálculo. Un estudio más avanzado de la topología general exige inevitablemente un gran número de otros conceptos, algunos de los cuales se explicarán en este apéndice. No se dará aquí ninguna demostración, pero puede servir de ejercicio al lector el hacer él mismo algunas, ya que, en su mayoría, no ofrecen dificultad alguna.

§ 1. Espacios Producto, Topologías Iniciales

Sea $(X_\iota)_{\iota\in I}$ una familia arbitraria de conjuntos. El producto cartesiano $\prod_{\iota\in I} X_\iota$ de los conjuntos X_ι es el conjunto de todas las familias $(x_\iota)_{\iota\in I}$, donde $x_\iota \in X_\iota$ para cada $\iota \in I$. Si I es el conjunto finito $\{j \mid j \in N,\ 1 \leq j \leq p\}$ de números enteros, se escribe también: $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_p$ ó $\prod_{j=1}^{p} X_j$ en vez de $\prod_{\iota\in I} X_\iota$. Si para cada $\iota \in I$ se da un subconjunto M_ι de X_ι, se denota $\prod_{\iota\in I} M_\iota$ el subconjunto de todos los puntos (x_ι) de $\prod_{\iota\in I} X_\iota$ tales que $x_\iota \in M_\iota$ para cada $\iota \in I$. Para cada índice $\varkappa \in I$, la aplicación $\pi_\varkappa$ de $\prod_{\iota\in I} X_\iota$ sobre $X_\varkappa$, que a cada $x = (x_\iota)$ hace corresponder el elemento $x_\varkappa$, se llama la $\varkappa$-ésima proyección. Si $M_\iota \subset X_\iota$ para todo $\iota \in I$, entonces $\prod_{\iota\in I} M_\iota = \bigcap_{\iota\in I} \pi_\iota^{-1}(M_\iota)$.

Sea ahora $(E_\iota)_{\iota\in I}$ una familia de espacios topológicos. La topología producto sobre el conjunto $E = \prod_{\iota\in I} E_\iota$ es aquélla para la cual un sistema fundamental de vecindades de un punto $x = (x_\iota)$ de E está dado por todos los conjuntos $\prod_{\iota\in I} V_\iota$, donde, para cada $\iota \in I$, el conjunto V_ι es una vecindad del punto x_ι en E_ι y, además, se supone que, con la excepción de un número finito de índices ι, se tiene $V_\iota = E_\iota$. Si I es el conjunto finito $\{j \mid j \in N,\ 1 \leq j \leq p\}$, un sistema fundamental de vecindades del punto $x = (x_1, \ldots, x_p)$ de $E_1 \times \ldots \times E_p$ está dado por todos los conjuntos $V_1 \times \ldots \times V_p$, donde para $1 \leq j \leq p$, el conjunto V_j es una vecindad de $x_j \in E_j$.

Si X e Y son dos espacios métricos con métricas respectivas d_X y d_Y, entonces la métrica producto $d_{X \times Y}$ (cap. 3, § 5) define sobre $X \times Y$ la topología producto de las topologías naturales de X e Y definidas respectivamente por d_X y d_Y. A la métrica d definida para $(x, y) \in X \times Y$, $(x', y') \in X \times Y$ por $d((x,y),(x',y')) = \max(d_X(x, x'), d_Y(y, y'))$ le corresponde la misma topología sobre $X \times Y$. En el caso $X = \mathbf{R}^p$, $Y = \mathbf{R}^q$ se ha hecho uso implícito de esta observación en el cap. 2, § 5, a fin de obtener un criterio de continuidad de funciones $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q \to \mathbf{R}^r$, y en el caso de un número finito de factores iguales a $\mathbf{R}$, éste es el significado verdadero del ejemplo **4.** 4. 6.

Sea $(X_\iota)_{\iota \in I}$ una familia de espacios topológicos y supóngase que $X = \prod_{\iota \in I} X_\iota$ está provisto de la topología producto. Los conjuntos abiertos de X son las reuniones arbitrarias de intersecciones finitas de conjuntos $\pi_\iota^{-1}(A_\iota)$, donde π_ι es la ι-ésima proyección y A_ι es un subconjunto abierto de X_ι. Una aplicación f de un espacio topológico Y en X es continua si, y sólo si, para todo $\iota \in I$, la aplicación $\pi_\iota \circ f : Y \to X_\iota$ es continua.

Un espacio topológico Y es separado si, y sólo si, en $Y \times Y$, provisto de la topología producto, la diagonal $\Delta = \{(y, y) \mid y \in Y\}$ es un subconjunto cerrado (cf. cap. 3, § 5, ejerc. 5). Desde luego, la demostración bosquejada de la prop. **3**. 5. 8 muestra la validez de la generalización siguiente: Si X es un espacio topológico, Y un *espacio de Hausdorff* y f y g dos funciones continuas definidas en X y con valores en Y, entonces el conjunto de los puntos $x \in X$, tales que $f(x) = g(x)$, es cerrado.

Uno de los resultados más útiles de la topología general es el teorema de Tijonov, según el cual si $(X_\iota)_{\iota \in I}$ es una familia de espacios compactos, entonces $\prod_{\iota \in I} X_\iota$, provisto de la topología producto, es un espacio compacto. La demostración de este teorema se basa en el famoso axioma de Zermelo, o sobre un principio equivalente e igualmente famoso, llamado el lema de Zorn.

El producto de una familia de espacios conexos es un espacio conexo. En particular, el espacio $\mathbf{R}^p$ es conexo. La aplicación $y \to x + \dfrac{\rho y}{1 + |y|}$ es un homeomorfismo de $\mathbf{R}^p$ sobre la bola $B_\rho(x)$ de $\mathbf{R}^p$, lo que constituye una nueva demostración de que $B_\rho(x)$ es conexo (ejemplo **4.** 6. 2).

La topología inducida y la topología producto son casos particulares de un método general de definir una topología. Sea $(X_\iota)_{\iota \in I}$ una familia de espacios topológicos, Y un conjunto y $(f_\iota)_{\iota \in I}$ una familia de aplicaciones $f_\iota : Y \to X_\iota$. La topología menos fina sobre Y para la cual todas las aplicaciones f_ι son continuas existe y se llama la topología inicial con respecto a la familia $(f_\iota)_{\iota \in I}$. Los subconjuntos abiertos de Y para esta topología son las reuniones arbitrarias de intersecciones finitas de conjuntos $f_\iota^{-1}(A_\iota)$, donde A_ι es un subconjunto abierto de X_ι. La topología inducida corresponde al caso en que $(X_\iota)_{\iota \in I}$ consta de un solo espacio X, el conjunto Y es un subconjunto de X y (f_ι) consiste en la sola inyección canónica $Y \to X$ La topología producto corresponde al caso $Y = \prod_{\iota \in I} X_\iota$ y $f_\iota = \pi_\iota$, para $\iota \in I$.

§ 2. Espacios Cociente, Topologías Finales

Sea E un espacio topológico, R una relación de equivalencia sobre E y φ la suprayección canónica de E sobre el conjunto cociente E/R (cap. 3, § 4). La topología cociente sobre E/R es aquélla para la cual un subconjunto A de E/R es abierto si, y sólo si, $\varphi^{-1}(A)$ es un subconjunto abierto de E.

Sea, por ejemplo, E el complemento del origen en el espacio numérico $\mathbf{R}^{p+1}$, y dígase que dos vectores x, y de E son equivalentes si existe un escalar $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$, tal que $y = \lambda x$. En tal caso el espacio cociente se llama el espacio proyectivo real de dimensión p, y se denota $\mathbf{P}_p(\mathbf{R})$. El espacio $\mathbf{P}_1(\mathbf{R})$ es homeomorfo a una circunferencia del plano euclidiano.

Sea E un espacio topológico, R una relación de equivalencia sobre E, $\varphi : E \to E/R$ la suprayección canónica, y supóngase que E/R está provisto de la topología cociente. Una aplicación f de E/R en un espacio topológico Y es continua si, y sólo si, $f \circ \varphi$ lo es.

La topología cociente es también un caso particular de un método general de definir topologías. Sea $(X_\iota)_{\iota \in I}$ una familia de espacios topológicos, Y un conjunto, y para cada $\iota \in I$, sea f_ι una aplicación de X_ι en Y. Entre las topologías sobre Y para las cuales las funciones f_ι son continuas existe una que es más fina que todas las otras, y esta topología se llama la topología final con respecto a la familia $(f_\iota)_{\iota \in I}$. Un subconjunto A de Y es abierto para esta topología si, y sólo si, $f_\iota^{-1}(A)$ es abierto en X_ι para cada $\iota \in I$. La topología cociente corresponde al caso en que (X_ι) es el solo espacio E, Y es el cociente E/R y (f_ι) es la suprayección canónica $\varphi : E \to E/R$.

§ 3. Filtros

Se vio en la § 4 del cap. cuarto que las sucesiones convergentes, tan útiles en los espacios métricos, pierden una gran parte de sus buenas propiedades en espacios topológicos generales. Es natural pues que se hayan buscado generalizaciones que jueguen el mismo papel en espacios topológicos que las sucesiones en los espacios métricos. En lo que sigue se presentará la más útil de éstas, a saber, el concepto de filtro, debido a Henri Cartan.

Una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un conjunto X se llama un filtro si satisface los axiomas siguientes:

(Fi 1) Si $A \in \mathcal{F}$ y B es un subconjunto de X que contiene A, entonces $B \in \mathcal{F}$.

(Fi 2) Si $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.

(Fi 3) El conjunto X pertenece a $\mathcal{F}$.

(Fi 4) El subconjunto vacío de X no pertenece a $\mathcal{F}$.

Ejemplos de filtros: 1) Es un filtro la colección $\mathcal{V}(x)$ de todas las vecindades de un punto x de un espacio topológico. 2) Sea Y un subconjunto no vacío de un conjunto X. Es un filtro la colección de todos los subconjuntos de X que contienen Y.

Se dice que el filtro $\mathcal{F}_1$ es más fino que el filtro $\mathcal{F}_2$ (o que $\mathcal{F}_2$ es menos fino que $\mathcal{F}_1$) si $\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2$.

Sea $\mathcal{B}$ una colección de subconjuntos del conjunto X y $\mathcal{F}$ la colección de todos los subconjuntos de X que contienen un conjunto de $\mathcal{B}$. Entonces $\mathcal{F}$ es un filtro si, y sólo si, $\mathcal{B}$ satisface las condiciones siguientes:

(BF 1) La intersección de dos conjuntos de $\mathcal{B}$ contiene un conjunto de $\mathcal{B}$.

(BF 2) $\mathcal{B}$ no es vacío, y el subconjunto vacío de X no pertenece a $\mathcal{B}$.

Si estas condiciones se cumplen, se dice que $\mathcal{B}$ es una base de filtro, y que $\mathcal{B}$ es una base del filtro $\mathcal{F}$ o que $\mathcal{B}$ genera a $\mathcal{F}$.

Ejemplos de bases de filtro: 1) Sobre el conjunto **N** de los enteros positivos los subconjuntos $S(n) = \{m | m \in \mathbf{N},\ m \geq n\}$, donde n recorre **N**, forman una base de filtro. El filtro que esta base genera se llama el filtro de Fréchet. 2) Un sistema fundamental de vecindades de un punto x de un espacio topológico es, por definición, una base del filtro $\mathcal{V}(x)$ de todas las vecindades de x.

Se dice que un filtro $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico E converge hacia el punto $x \in E$ si $\mathcal{F}$ es más fino que el filtro $\mathcal{V}(x)$ de las vecindades de x. Se dice que una base de filtro $\mathcal{B}$ sobre E converge hacia $x \in$ E si el filtro generado por $\mathcal{B}$ converge hacia x. La base de filtro $\mathcal{B}$ converge hacia x si, y sólo si, para cada vecindad V de x existe un conjunto B $\in \mathcal{B}$ tal que V $\supset$ B.

Sean X e Y dos conjuntos y f una aplicación de X en Y. Si $\mathcal{B}$ es una base de filtro sobre X, la colección $f(\mathcal{B})$ de todas las imágenes f(B) de los conjuntos B $\in \mathcal{B}$ es una base de filtro sobre Y. Si Y es un espacio topológico y si $f(\mathcal{B})$ converge hacia $y \in$ Y, se dice que f converge hacia y con respecto a $\mathcal{B}$, y se escribe $\lim\limits_{x,\mathcal{B}} f(x) = y$. Si X es también un espacio topológico y si para $\mathcal{B}$ se escoge el filtro de vecindades $\mathcal{V}(a)$ de un punto $a \in$ X, entonces el hecho de converger f hacia y con respecto a $\mathcal{V}(a)$ se expresa diciendo que $f(x)$ converge hacia y cuando x converge hacia a, y se denota $\lim\limits_{x \to a} f(x) = y$.

Sea, por ejemplo, $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ una sucesión de puntos en un espacio topológico E. Entonces $n \mapsto x_n$ es una aplicación de **N** en E, y la imagen del filtro de Fréchet genera un filtro sobre E que se llama el filtro elemental asociado a la sucesión (x_n). Una base de este filtro elemental consta de todos los conjuntos $\{x_m | m \in \mathbf{N},\ m \geqq n\}$, donde n recorre **N**. La sucesión $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge hacia un punto $x \in$ E si, y sólo si, el filtro elemental asociado a (x_n) converge hacia x. Si la sucesión (y_n) es una subsucesión de (x_n), entonces el filtro elemental asociado a (y_n) es más fino que el filtro elemental asociado a (x_n).

Sean X e Y dos espacios topológicos. La aplicación f: X $\to$ Y es continua en el punto $a \in$ X si, y sólo si, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. La prop. **4.4.3**, que, en su forma original, no es en general válida para espacios topológicos (ejemplo **4.4.3**), se generaliza de la manera siguiente: La función f : X $\to$ Y es continua en el punto $x \in$ X si, y sólo si, para cada base de filtro $\mathcal{B}$ sobre X que converge hacia x, la base de filtro $f(\mathcal{B})$ converge hacia $f(x)$.

Un espacio topológico E es un espacio de Hausdorff si, y sólo si, todo filtro en E tiene a lo más un límite.

La prop. **4.4.2** tiene la forma general siguiente, válida en cualquier espacio topológico E: El punto $a \in$ E es adherente al conjunto M $\subset$ E si, y sólo si, existe una base de filtro sobre M que converge hacia a.

Se dice que el punto x del espacio topológico E es un punto adherente al filtro $\mathcal{F}$ si x es adherente a todo A $\in \mathcal{F}$. Un punto x es un punto de acumulación de la sucesión (x_n) si, y sólo si, es adherente al filtro elemental asociado a (x_n). Si x es adherente al filtro $\mathcal{J}$, entonces existe un filtro más fino que $\mathcal{J}$ que converge hacia x (cf. ejerc. 2 del cap. cuarto, § 5).

Finalmente, un espacio separado es compacto si, y sólo si, cada filtro tiene por lo menos un punto adherente, es decir, si para cada filtro existe un filtro más fino convergente.

§ 4. Grupos Topológicos, Espacios Uniformes

Sin duda se habrá observado que en el cap. cuarto se omitieron totalmente ciertos conceptos que desempeñan un papel fundamental en la teoría de los espacios métricos. Nos referimos, en particular, a las sucesiones de Cauchy, al concepto de espacio completo y a las funciones uniformemente continuas (def. 3.5.3). Cada uno de estos conceptos compara la "proximidad" de parejas de puntos situados en lugares distintos del espacio, diciendo que la distancia de dos puntos es inferior o igual a un $\epsilon > 0$ que no depende de x o de y y es *uniforme* para todo el espacio. Es claro que esta idea no tiene otra análoga en espacios topológicos.

Para buscar una posible generalización adóptense las notaciones siguientes. Si X es un conjunto arbitrario, la diagonal Δ de $X \times X$ es el conjunto de todos los puntos (x,x), donde $x \in X$. Si A es un subconjunto de $X \times X$, entonces A^{-1} será el conjunto de todas las parejas (x,y), tales que (y,x) pertenece a A. Si A y B son dos subconjuntos de $X \times X$, entonces $A \circ B$ será el conjunto de todas las parejas (x,z) para las cuales existe $y \in X$ tal que $(x,y) \in A$ y $(y,z) \in B$.

Sea ahora E un espacio métrico no vacío y llámese entorno de E a un subconjunto W de $E \times E$ que contenga un conjunto de la forma $\{(x,y) \mid d(x,y) \leq \epsilon\}$ con $\epsilon > 0$. Los entornos de E forman un filtro sobre $E \times E$ y tienen las propiedades siguientes:

(U1) Cada entorno contiene la diagonal Δ de $E \times E$.

(U2) Si W es un entorno, entonces W^{-1} también lo es.

(U3) Si W es un entorno, entonces existe un entorno W_1 tal que $W_1 \circ W_1 \subset W$.

En efecto, (U1) resulta de $d(x,x) = 0$, (U2) de $d(x,y) = d(y,x)$ y (U3) de la desigualdad del triángulo. Como además $d(x,y) = 0$ implica $x = y$, se tiene la propiedad adicional:

(S) La intersección de todos los entornos de E es la diagonal Δ de $E \times E$.

Considérese luego otra situación en que se pueden introducir entornos. Sea G un grupo (véase p. ej. el cap. segundo de la monografía de esta serie de Enzo R. Gentile: Estructuras algebraicas) y $\mathcal{T}$ una topología sobre el conjunto G. Se dice que G es un grupo topológico, o que la topología $\mathcal{T}$ es compatible con la estructura de grupo de G, si la aplicación $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ de $G \times G$ en G es continua, donde $G \times G$ está provisto de la topología producto. Si A es un subconjunto del grupo G, entonces A^{-1} es el conjunto de todos los elementos a^{-1} con $a \in A$, y para $b \in G$ se denota por $b \cdot A \cdot b^{-1}$ el conjunto de todos los elementos bab^{-1} con $a \in A$; si A y B son dos subconjuntos de G, entonces AB es el conjunto de todos los elementos ab, con $a \in A$ y $b \in B$. La colección $\mathcal{V} = \mathcal{V}(e)$ de todas las vecindades del elemento neutro (elemento "identidad") e del grupo topológico G, es un filtro que tiene las propiedades siguientes:

(GV1) Para todo $U \in \mathcal{V}$ existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \cdot V \subset U$.

(GV2) Para todo $U \in \mathcal{V}$, se tiene $U^{-1} \in V$.

(GV3) Para todo $x \in G$ y $U \in \mathcal{V}$ se tiene $x \cdot U \cdot x^{-1} \in \mathcal{V}$.

Inversamente, si $\mathcal{V}$ es un filtro sobre un grupo G, que satisface las condiciones (GV1)-(GV3), entonces existe sobre G una topología $\mathcal{T}$, y una sola, compatible con la estructura de grupo y para la cual $\mathcal{V}$ es la colección de las vecindades de e. Para esta topología $\mathcal{T}$, el filtro de vecindades de un punto $x \in G$ es la colección de los conjuntos $xU = \{xy \mid y \in U\}$, donde U recorre $\mathcal{V}$. 135

Un grupo topológico es un espacio de Hausdorff si, y sólo si, la intersección de todas las vecindades de e es $\{e\}$.

Un ejemplo de grupo topológico (conmutativo) es el espacio $\mathbf{R}^p$ con respecto a la adición $(x, y) \mapsto x + y$. En efecto, la continuidad de $(x, y) \mapsto x - y$ resulta del teorema **2**. 5. 3 y del corolario 2 del teorema **2**. 5. 4.

Llámese entorno del grupo topológico G a un subconjunto W de $G \times G$ que contenga un conjunto de la forma $\{(x, y) \mid xy^{-1} \in U\}$, donde U es una vecindad de e. Los entornos de G forman un filtro sobre $G \times G$ y satisfacen las propiedades (U1)-(U3). Además, los entornos de G verifican (S) si, y sólo si, G es un espacio de Hausdorff.

Estos dos ejemplos conducen al concepto de estructura uniforme, descubierta de manera independiente por Leon W. Cohen y André Weil. Una estructura uniforme sobre un conjunto no vacío E se define mediante un filtro $\mathcal{U}$ sobre $E \times E$ cuyos conjuntos se llaman entornos de la estructura uniforme y verifican los axiomas (U1)-(U3). Un conjunto E provisto de una estructura uniforme se llama un espacio uniforme y los elementos de $\mathscr{U}$ se llaman también los entornos del espacio uniforme E.

Se dice que una estructura uniforme es separada si sus entornos satisfacen la condición (S).

Sean X e Y dos espacios uniformes. Se dice que una aplicación $f: X \to Y$ es uniformemente continua si para cada entorno W de Y existe un entorno W_1 de X tal que $(x, y) \in W_1$ implica $(f(x), f(y)) \in$ $\in W$.

Si E es un espacio uniforme, se puede definir una topología $\mathscr{T}$ sobre E considerando como vecindades de un punto $x \in E$ los conjuntos $W(x) = \{y \mid (x, y) \in W\}$, donde W recorre los entornos de E. Se dice que $\mathscr{T}$ es la topología deducida de la estructura uniforme de E. Cuando se habla de conceptos topológicos en un espacio uniforme, se entiende que éstos se consideran con respecto a la topología deducida de la estructura uniforme.

Dado un conjunto provisto de una topología $\mathscr{T}$ y de una estructura uniforme $\mathscr{U}$, se dice que $\mathscr{U}$ es compatible con $\mathscr{T}$ si $\mathscr{T}$ es la topología deducida de $\mathscr{U}$.

La topología deducida de una estructura uniforme es una topología de Hausdorff si, y sólo si, la estructura uniforme es separada. En un espacio uniforme, las vecindades cerradas de un punto x forman un sistema fundamental de vecindades de x (cf. ejerc. 9 del cap. primero, § 2).

Una sucesión (x_n) de puntos del espacio uniforme E es una sucesión de Cauchy si para cada entorno W de E existe un número entero positivo N(W) tal que $(x_n, x_m) \in W$ para toda pareja $(n, m) \in$ $\in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ que verifica $n \geq N(W)$ y $m \geq N(W)$. Más generalmente un filtro $\mathscr{F}$ sobre E es un filtro de Cauchy si para cada entorno W de E existe $A \in \mathscr{F}$ tal que $A \times A \subset W$. Un espacio uniforme E es completo si cada filtro de Cauchy sobre E es convergente. A cada espacio uniforme separado E se le puede asociar un espacio uniforme separado completo $\hat{E}$ y una inyección $j: E \to \hat{E}$ tal que j y la aplicación inversa $j^{-1}: j(E) \to E$ son uniformemente continuas, y que $j(E)$ es un conjunto denso en $\hat{E}$ (cf. teorema **3**. 4. 1). La pareja $(j, \hat{E})$ se llama un completado de E, y es esencialmente único (cf. prop. 5. 11). Si X es un espacio uniforme, D un subconjunto denso de X e Y es un espacio uniforme separado y completo, entonces a cada función uniformemente continua $f: D \to Y$, le corresponde una función uniformemente continua, y una sola $\tilde{f}: X \to Y$, tal que $\tilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in D$ (cf. teorema **3**. 5. 3).

Si X es un espacio topológico compacto, entonces existe exactamente una estructura uniforme sobre X compatible con la topología de X. Los entornos correspondientes a esta estructura uniforme son las vecindades (cf. ejerc. 5 del cap. primero, § 2) de la diagonal Δ de $X \times X$ con respecto a la topología producto. El teorema **2**. 6. 3 tiene la forma general siguiente: Toda función continua definida sobre un espacio compacto X, y con valores en un espacio uniforme, es uniformemente continua (con respecto a la única estructura uniforme sobre X que es compatible con la topología de X).

BIBLIOGRAFIA

En esta bibliografía se citan las obras a las cuales se ha hecho referencia en el texto y, además, una lista de tratados sobre topología general. Observe el lector sobre todo la referencia bibliográfica (3) que alude a la obra magistral de Bourbaki, cuya terminología y notación se ha seguido en esta monografía. El libro del autor (17), escrito de acuerdo con el espíritu que inspira esta monografía, ilustra al lector sobre cómo se aplican las ideas de la topología general al análisis funcional.

(1) BAUM, J. D. Elements of Point Set Topology, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1964).

(2) BERGE, C. Espaces Topologiques, Fonctions Multivoques, Collection Universitaire de Mathématiques, Vol. III, Dunod, París (1959).

● (3) BOURBAKI, N. Eléments de Mathématiques, Livre III, Topologie Générale, Actualités Scientifiques et Industrielles 1142, 1143, 1235, 1045, 1084, 1196, Hermann, París (1953-1961).
Traducción inglesa: Elements of Mathematics, General Topology, Parts 1 and 2, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1966).

(4) BUSHAW, D. Elements of General Topology, Wiley, Nueva York (1963).

(5) CHINN, W. G. y STEENROD, N. E. First Concepts of Topology, The Geometry of Mappings of Segments, Curves, Circles and Disks, New Mathematical Library, N° 18, Random House, Singer, Nueva York (1966).

(6) CHOQUET, G. Cours d'Analyse, Tome II, Topologie, Masson, París (1964).
Traducción inglesa: Topology, Pure and Applied Mathematics, Vol. 19, Academic Press, Nueva York (1966).

(7) COHEN, L. W. y EHRLICH, G. The Structure of the Real Number System, Van Nostrand, Princeton, N. J. (1963).

(8) CSÁSZÁR, Á. Grundlagen der allgemeinen Topologie, Akadémiai Kiadó, Budapest (1963).

De este libro existen versiones anteriores en inglés y en francés: Foundations of General Topology, Macmillan, Nueva York (1963) y Fondements de la Topologie Générale, Gauthier-Villars, París (1960).

(9) DUGUNDJI, J. Topology, Allyn and Bacon, Boston, Mass. (1966).

(10) FRANZ, W. Topologie I, Allgemeine Topologie, Sammlung Göschen Bd. 1181, Walter de Gruyter & Co., Berlín (1960).

(11) GAAL, S. A. Point Set Topology, Pure and Applied Mathematics, Vol. 16, Academic Press, Nueva York (1964).

(12) GEMIGNANI, M. C. Elementary Topology, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1967).

(13) GENTILE, E. R. Estructuras Algebraicas, Serie de Matemática, monografía No. 3, Unión Panamericana, Washington, D. C. (1967).

(14) GREEVER, J. Theory and Examples in Point-Set Topology, Brooks-Cole, Belmont, California (1967).

(15) HALL, D. W. y SPENCER, G. L. Elementary Topology, Wiley, Nueva York (1955).

(16) HOCKING, J. G. y YOUNG, G. S. Topology, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1961).

(17) HORVÁTH, J. Topological Vector Spaces and Distributions, Vol. I, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1966).

(18) HU, SZE-TSEN. Elements of General Topology, Holden-Day, San Francisco, California (1964).

(19) HU, SZE-TSEN. Introduction to General Topology, Holden-Day, San Francisco, California (1966).

(20) ISBELL, J. R. Uniform Spaces, Mathematical Surveys No. 12, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (1964).

(21) KELLEY, J. L. General Topology, Van Nostrand, Nueva York (1955).

(22) KOWALSKY, H. J. Topologische Räume, Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe, Bd. 26, Birkhäuser, Basilea (1961). Traducción inglesa: Topological Spaces, Academic Press, Nueva York (1964).

(23) KURATOWSKI, K. Topologie I, II, Monografie matematyczne, Tom. 20-21, Państwowe Wydawnictwo Naukove, Varsovia (1958, 1961).

(24) KURATOWSKI, K. Introduction à la théorie des ensembles et à la topologie, L'Enseignement Mathématique, Ginebra (1966).

(25) MAMUZIČ, Z. P. Introduction to General Topology. Nordhoff, Groninga (1963).

(26) MANSFIELD, M. J. Introduction to General Topology, Van Nostrand, Princeton (1963).

(27) McCARTY, G. Topology: An Introduction with Applications to Topological Groups, McGraw-Hill, Nueva York (1967).

(28) MENDELSON, B. Introduction to Topology, Allyn and Bacon, Boston, Mass. (1962).

(29) MOORE, T. O. Elementary General Topology, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1964).

(30) NEWMAN, M. H. A. Elements of the Topology of Plane Sets of Points, Cambridge University Press, Londres (1954).

(31) PERVIN, W. J. Foundations of General Topology, Academic Press, Nueva York (1964).

(32) SIMMONS, G. F. Introduction to Topology and Modern Analysis, McGraw-Hill, Nueva York (1963).

(33) THRON, W. J. Topological Structures, Holt, Rinehart and Winston, Nueva York (1966).

(34) TREJO, C. A. El Concepto de Número, Serie de Matemática, monografía No. 7, Unión Panamericana, Washington, D. C. (1968).

(35) WEIL, A. Basic Number Theory, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Vol. 144, Springer-Verlag, Nueva York (1967).

INDICE TERMINOLOGICO

Una referencia de la forma **2.** 3 significa que una definición del término se puede hallar en la § 3 del capítulo segundo.

COLECCION DE MONOGRAFIAS CIENTIFICAS

Publicadas

Serie de matemática

N° 1. La Revolución en las Matemáticas Escolares, por el Consejo Nacional de Maestros de Matemática de los Estados Unidos de América.
N° 2. Espacios Vectoriales y Geometría Analítica, por Luis A. Santaló.
N° 3. Estructuras Algebraicas, por Enzo R. Gentile.
N° 4. Historia de las Ideas Modernas en la Matemática, por José Babini.
N° 5. Algebra Lineal, por Orlando Villamayor.
N° 6. Álgebra Lineal e Geometria Euclidiana, por Alexandre Augusto Martins Rodrigues.
N° 7. El Concepto de Número, por César A. Trejo.

N° 8. Funciones de Variable Compleja, por José I. Nieto.
N° 9. Introducción a la Topología General, por Juan Horváth.

Serie de física

N° 1. Concepto Moderno del Núcleo, por D. Allan Bromley.
N° 2. Panorama de la Astronomía Moderna, por Félix Cernuschi y Sayd Codina.
N° 3. La Estructura Electrónica de los Sólidos, por Leopoldo M. Falicov.
N° 4. Física de Partículas, por Igor Saavedra.
N° 5. Experimento, Razonamiento y Creación en Física, por Félix Cernuschi.

Serie de química

N° 1. Cinética Química Elemental, por Harold Behrens Le Bas.
N° 2. Bioenergética, por Isaias Raw y Walter Colli.
N° 3. Macromoléculas, por Alejandro Paladini y M. Burachik.
N° 4. Mecanismo de las Reacciones Orgánicas, por Jorge A. Brieux.
N° 5. Elementos Encadenados, por Jacobo Gómez Lara.
N° 6. Enseñanza de la Química Experimental, por Francisco Giral.

Serie de biología

Nº 1. La Genética y la Revolución en las Ciencias Biológicas, por José Luis Reissig.
Nº 2. Bases Ecológicas de la Explotación Agropecuaria en la América Latina, por Guillermo Mann F.
Nº 3. La Taxonomía y la Revolución en las Ciencias Biológicas, por Elías R. de la Sota.
Nº 4. Principios Básicos para la Enseñanza de la Biología, por Oswaldo Frota-Pessoa.
Nº 5. A Vida da Célula, por Renato Basile.
Nº 6. Microorganismos, por J. M. Gutiérrez-Vázquez.

En preparación

Serie de matemática

Funções Reais de Variável Real, por Djairo Guedes de Figueiredo.

Serie de física

Fôrças Nucleares, por Oscar Sala.
Radiación Cósmica, por Gastón Mejía y Magín Zubieta.
Semiconductores, por George Bemski.
Ondas, por Victor Latorre.
Física Cuántica, por Onofre Rojo Asenjo y H. McIntosh.

Serie de biología

Hereditariedade Humana, por P. H. Saldanha.
Biosíntesis de Proteínas y el Código Genético, por Jorge E. Allende.

Nota. Las personas interesadas en adquirir estas obras deben dirigirse a la División de Ventas y Promoción, Unión Panamericana, Washington, D. C. 20006.